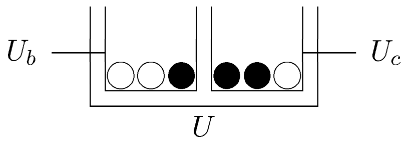
— jeśli $z(A, B) > 0$, to $B \nearrow A$,
— jeśli $z(A, B) < 0$, to $B \searrow A$.

9.4 Prawdopodobieństwo całkowite

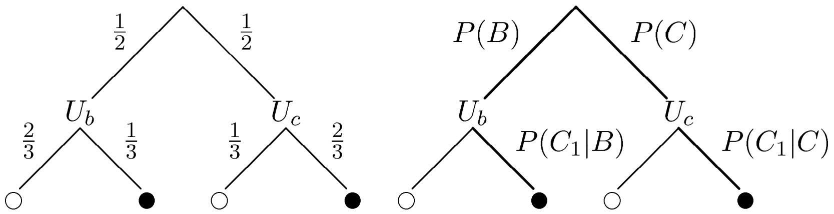
W pojemniku U są dwie urny identyczne w dotyku i wyglądzie zewnętrznym:
urna U_b — z dwiema kulami białymi i jedną czarną i
urna U_c — z jedną kulą białą i dwiema czarnymi.
Doświadczenie losowe d rozpoczynie się od losowania urny z pojemnika U. Następnie, bez zaglądania do wnętrza wylosowanej urny, będzie z niej losowana kula n razy ze zwracaniem.



rys. 9.4 Pojemnik U z dwiema urnami: U_a i U_b

Rozważmy zdarzenia związane z doświadczeniem losowym d:
$B_j = \{$*wylosowana za j-tym razem kula będzie biała*$\}$,
$C_j = \{$*wylosowana za j-tym razem kula będzie czarna*$\}, j = 1, 2, 3, ..., n$.
Dla każdego $j = 1, 2, 3, ..., n$ zdarzenia B_j i C_j są przeciwe. Weźmy tu również pod uwagę zdarzenia związane z losowaniem urny:
$B = \{$*wylosowana na początku urna to* $U_b\}$,
$C = \{$*wylosowana na początku urna to* $U_c\}$.
Zdarzenia B i C tworzą układ zupełny zdarzeń i $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{9-31}}$ Z jakim prawdopodobieństwem – w opisanym doświadczeniu losowym d – kula wylosowana za pierwszym razem będzie czarna?



rys. 9.5 Drzewo stochastyczne dla losowania kuli z wylosowanej urny

W zadaniu chodzi o $P(C_1)$. Zauważ, że $P(C_1|B) = \frac{1}{3}$ i $P(C_1|C) = \frac{2}{3}$. Znamy prawdopodobieństwa warunkowe zdarzenia C_1, znamy prawdopodobieństwa tych „warunków", przy czym „warunki" te tworzą układ zupełny zdarzeń. Pytamy, jak w tej sytuacji obliczyć $P(C_1)$. Z drzewa na rys. 9.5 wynika, że: $P(C_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

Ta odpowiedź wynika natychmiast z pewnych symetrii. Szanse każdej z urn są równe i w jednej z urn jest tyle kul białych, co w drugiej czarnych i na odwrót. Nie ma więc podstaw, aby wylosowanie kuli czarnej uważać za bardziej lub mniej prawdopodobne niż kuli białej. Zdarzenia C_1 i B_1 są więc jednakowo prawdopodobne. Są również jednakowo prawdopodobne zdarzenia C_j i B_j dla $j > 1$. Jest więc $P(C_j) = P(B_j) = \frac{1}{2}$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

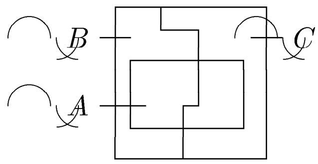
Wynikająca z drzewa stochastycznego suma $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ we wzorze na $P(C_1)$ ma postać: $P(B) \cdot P(C_1|B) + P(C) \cdot P(C_1|C)$.

Załóżmy, że A, B i C są zdarzeniami w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), że P jest prawdopodobieństwem w tej przestrzeni i że:
— $B \cup C = \Omega$ i $B \cap C = \emptyset$ (zdarzenia B i C tworzą układ zupełny zdarzeń),
— znamy $P(B)$ i $P(B) > 0$, znamy $P(C)$ i $P(C) > 0$,
— znamy $P(A|B)$ i znamy $P(A|C)$.
Z tych założeń wynika, że $P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(C) \cdot P(A|C)$.

!!!!!!*tu uogólnienie na n zdarzeń*!!!!!

Twierdzenie, o którym mowa, nosi nazwę *twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.*

9-32 Udowodnij powyższe twierdzenie korzystając z rys. 9.6 prezentującego zdarzenia i ich prawdopodobieństwa w geometrycznej.



rys. 9.6 Zdarzenia A, B i C w geometrycznej interpretacji przestrzeni probabilistycznej

Powróćmy do doświadczenia d, w którym losuje się urnę, a następnie — nie zaglądając do jej wnętrza — losuje się zeń kulę n razy ze zwracaniem.

9-33 Załóżmy, że za pierwszym razem wylosowano kulę czarną. Zaszło więc zdarzenie C_1. Jakie jest w tej sytuacji prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej za drugim razem? Czy informacja o zajściu zdarzenia C_1 woływa na prawdopodobieństwo zdarzenia C_2? Co na to Twoja intuicja a co teoria?

W zadaniu chodzi o $P(C_2|C_1)$. Kule losujemy ze zwracaniem z tej samej urny. Wydaje się oczywiste, że informacja o tym, że za pierwszym razem wylosowana kula jest czarna, nie może wpływać na prawdopodobienstwo wylosowania kuli czarnej za drugim razem, a więc że $P(C_2|C_1) = P(C_2) = \frac{1}{2}$.

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego oraz z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym wynika, że

$$P(C_2|C_1) = \frac{P(C_1 \cap C_2)}{P(C_1)} = \frac{P(B) \cdot P(C_1 \cap C_2|B) + P(C) \cdot P(C_1 \cap C_2|C)}{P(C_1)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3})}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2} = P(C_2).$$

Informacja, że zaszło zdarzenie C_1 zwiększa szanse zdarzenia C_2, a zdawało się, że ta informacja nie wpływa na prawdopodobieństwo zdarzenia C_2.

$\boxed{\textbf{9-34}}$ Załóżmy, że za pierwszym razem wylosowano kulę czarną. Nadal nie wiadomo z jakiej urny ją wylosowano. Można więc pytać o prawdopodobieństwo, że jest ona urną U_b i o prawdopodobieństwo, że jest ona urną U_c. Pytania dotyczą warunkowych prawdopodobieństw zdarzenia B i zdarzenia C, skoro wiadomo, że zaszło zdarzenie C_1. Znajdź te prawdopodobieństwa.

Mamy tu:

$$P(C|C_1) = \frac{P(C \cap C_1)}{P(C_1)} = \frac{P(C) \cdot P(C_1|C)}{P(C_1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} = P(C),$$

a więc informacja, że wylosowana za pierwszym razem kula jest czarna, zwiększa prawdopodobieństwo tego, że kula jest losowana z urny U_c. W zadaniu chodzi o prawdopodobieństwo „przyczyny", skoro znany jest „skutek". Nazywa się je *prawdopodobieństwem warunkowym a posteriori.*

$\boxed{\textbf{9-35}}$ Za pierwszym i za drugim razem została wylosowana czarna kula.
a) Jakie jest w tej sytuacji prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej za trzecim razem?
b) Jakie jest w tej sytuacji prawdopodobieństwo, że kule są losowane z urny u_c, a jakie, że z urny u_b?

$\boxed{\textbf{9-36}}$ Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania za trzecim razem kuli czarnej, skoro wiadomo, że za pierwszym razem została wylosowana kula czarna, a za drugim biała?

$\boxed{\textbf{9-37}}$ Załóżmy, że w n losowaniach czarna kula została wylosowana k razy i $k \neq 0$, i $k \neq n$. Oznaczmy zdarzenie, o którego zajściu tu mowa, przez C_k^n. Znajdź $P(C|C_k^n)$ i $P(B|C_k^n)$. Przedyskutuj, jak w zależności od k zmienia się prawdopodobieństwo, że kule losowane są z urny U_b, a jak, że z urny U_c.

Chodzi tu o $P(C|C_k^n)$, a więc o *prawdopodobieństwo warunkowe a posteriori.* Jest ono prawdopodobieństwem, że losujemy kule z urny U_c, skoro wiadomo, że w n losowaniach dokładnie k razy trafiła nam się czarna kula.

Mamy tu:
$P(C \cap C_k^n) = P(C) \cdot P(C_k^n|C) = \frac{1}{2}\binom{n}{k}(\frac{2}{3})^k(\frac{1}{3})^{n-k}$,
$P(C_k^n) = P(B)P(C_k^n|B) + P(C)P(C_k^n|C) = \frac{1}{2}\binom{n}{k}(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{n-k} + \frac{1}{2}\binom{n}{k}(\frac{2}{3})^k(\frac{1}{3})^{n-k}$,
a więc:

$$P(C|C_k^n) = \frac{P(C \cap C_k^n)}{P(C_k^n)} = \frac{2^k}{2^{n-k} + 2^k}.$$

Jeśli n jest parzyste i $k = \frac{1}{2}n$, to $P(C|C_k^n) = \frac{1}{2} = P(B|C_k^n)$. Jeśli w n losowaniach kula czarna została wylosowana tyle samo razy co biała, to szanse urn U_b i U_c są równe. Gdy $k < \frac{n}{2}$ (gdy czarna kula była losowana rzadziej niż biała), to $P(C|C_k^n) < \frac{1}{2}$, a zatem $P(B|C_k^n) > \frac{1}{2}$. Szanse urny U_c są w takiej sytuacji mniejsze niż urny U_b. Gdy $k > \frac{n}{2}$ — szanse urny U_c są większe niż urny U_b.

9-38 Załóżmy, że $n = 30$ i $k = 10$. Znajdź $P(C|C_{10}^{30})$ i $P(B|C_{10}^{30})$. Sformułuj wniosek, jaki na temat nieznanej urny (z której losowano kule) wynika z faktu, że zaszło zdarzenie C_{10}^{30}. Intuicja podpowiada, że prawie na pewno wchodzi tu w rachubę urna U_b z dwiema białymi kulami i jedną czarną. Czy rachunki to potwierdzają?

Sprawdź, że:

$$P(C|C_{10}^{30}) = \tfrac{2^{10}}{2^{20}+2^{10}} = \tfrac{1}{2^{10}+1} \quad \text{i} \quad P(B|C_{10}^{30}) = \tfrac{2^{20}}{2^{20}+2^{10}} = \tfrac{2^{10}}{2^{10}+1}.$$

Ostatni ułamek jest bliski 1, a więc praktycznie na pewno urna, z której losowano kule, to urna U_b.

Wyniki n-krotnego losowania ze zwracaniem kuli z urny (o nieznanej liczbie czarnych kul) to *dane statystyczne* (czyli *próbka*). Jeśli tylko n jest dostatecznie duże, to na ich podstawie można oceniać nieznaną liczbę czarnych kul w urnie. Problem, który tu się pojawił, dotyczy szacowania pewnych wielkości (tu liczby czarnych kul w urnie) na podstawie danych statystycznych. Takie szacowanie nazywa się *estymacją* i jest przedmiotem statystyki matematycznej.

9-39 W urnie są 3 kule. Wiadomo jedynie, że są to kule białe i czarne. Nie znamy liczby c kul czarnych w urnie, z której losujemy. Wiadomo jedynie, że $c = 1$ albo $c = 2$. Załóżmy, że losowano n razy ze zwracaniem kulę z tej urny i dokładnie k razy trafiono na kulę czarną ($0 < k < n$). Dla jakiego c prawdopodobieństwo tego, co się zdarzyło, jest maksymalne?

Liczba c, o której mowa w ostatnim zadaniu, jest *najbardziej wiarygodnym* kandydatem na oszacowanie nieznanej liczby czarnych kul w urnie. Mamy tu:

$$P(\textit{w n losowaniach kula czarna zostanie wylosowana dokładnie k razy})=$$
$$= P(C_k^n) = \tbinom{n}{k}(\tfrac{c}{3})^k\ (\tfrac{3-c}{3})^{n-k} \text{ dla } k = 1, 2, ..., n-1 \text{ i } c = 1, 2.$$

Czynnik $\binom{n}{k}$ jest liczbą ustaloną i dodatnią, a zatem $P(C_k^n)$ jest największe dla tego c, dla którego iloczyn $(\frac{c}{3})^k(\frac{3-c}{3})^{n-k}$ jest największy.

Nich $\frac{c}{3} = x$. Ostatni iloczyn jest więc postaci: $x^k(1-x)^{n-k}$. Rozważmy funkcję $f(x) = x^k(1-x)^{n-k}$ dla $x \in (0, 1)$. Funkcja f jest różniczkowalna na przedziale (0,1), a więc jej ekstrema możemy znaleźć za pomocą pochodnej. Sprawdź, że $f'(\frac{k}{n}) = 0$ i $f''(\frac{k}{n}) < 0$. Funkcja f ma więc maksimum w punkcie $x_o = \frac{k}{n}$. Ale $x = \frac{c}{3}$, zatem $\frac{c}{3} = \frac{k}{n}$. Jeśli w przypadku $n = 30$ mamy $k = 10$, to najbardziej wiarygodnym kandydatem na liczbę c czarnych kul w urnie jest 1. Podobny problem opisano w zadaniu 7-34.

W kolejnych zadaniach mowa jest znów o doświadczeniu losowym d opisanym na str. 304.

9-40 W $n-1$ kolejnych losowaniach kuli za każdym razem wyciągana była czarna kula. Zaszło więc zdarzenie $C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_{n-1}$. Jakie jest w tej sytuacji prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej w n-tym losowaniu? Oznaczmy to warunkowe prawdopodobieństwo przez a_n. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny. Znajdź jego granicę. Jak wytłumaczysz uzyskany rezultat?

Jest $a_n = P(C_n|C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_{n-1}) = \frac{(\frac{1}{3})^n+(\frac{2}{3})^n}{(\frac{1}{3})^{n-1}+(\frac{2}{3})^{n-1}}$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$.

9-41 W n kolejnych losowaniach za każdym razem trafiono na kulę czarną. Jakie jest w tej sytuacji prawdopodobieństwo, że kule losowano z urny U_c? Oznaczmy przez b_n to warunkowe prawdopodobieństwo *a posteriori*. Wykaż, że ciąg (b_n) jest zbieżny. Jak wytłumaczyć fakt, że granicą tego ciągu jest liczba 1?

9-42 Rekwizytem w grze są trzy krążki identyczne w dotyku: krążek z obu stron biały, krążek z obu stron czarny i krążek z jednej strony czarny z jednej biały. Będziesz losował krążek i szybkim ruchem kładł go na stół. Dostaniesz punkt jeśli odgadniesz jaki kolor ma strona, na której krążek leży. Czy możesz wpływać na swe szanse zdobycia punktu w takiej grze losowej? Oczywiście nie wchodzi w rachubę podglądanie.

Pytanie dotyczy racjonalnej strategii w grze. Wydaje się, że takiej nie ma. Jest tyle samo białych, co i czarnych ścianek na tych krążkach. Każdy krążek ma równe szanse przy jego losowaniu. Z tych symetrii zdaje się wynikać, że jest tak samo prawdopodobne, że niewidoczna strona krążka jest biała, jak to, że jest ona czarna. Wykażemy, że ten intuicyjny wniosek jest błędny.

Rozważmy zdarzenia związane z losowaniem krążka:
$C = \{$*widoczna strona wylosowanego krążka jest czarna*$\}$,
$A_0 = \{$*wylosowany krążek jest z obu stron biały*$\}$,
$A_1 = \{$*wylosowany krążek jest z jednej strony biały, z jednej czarny*$\}$,
$A_2 = \{$*wylosowny krążek jest z obu stron czarny*$\}$.

Jest $P(A_0) = P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{3}$. Z pewnych symetrii (ale także z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym) wynika, że $P(C) = \frac{1}{2}$.

Załóżmy, że widoczna strona krążka jest czarna. Zaszło więc zdarzenie C. Niewidoczna strona krążka może być biała (będzie tak, gdy zaszło zdarzenie A_1), albo czarna (będzie tak, gdy zaszło zdarzenie A_2). Zauważmy, że

$$P(A_1|C) = \tfrac{P(A_1 \cap C)}{P(C)} = \tfrac{P(A_1)\cdot P(C|A_1)}{P(C)} = \tfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3} \text{ i } P(A_2|C) = \tfrac{2}{3}.$$

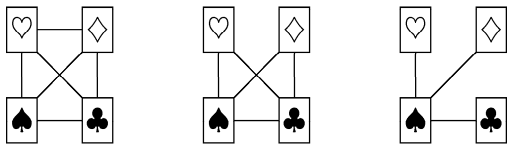
Informacja, że zaszło zdarzenie C zwiększa (i to dwukrotnie) prawdopodobieństwo zdarzenia A_2. Jeśli widoczna strona krążka jest czarna, to jest 2 razy bardziej prawdopodobne, że strona niewidoczna jest też czarna, niż że jest biała. Z dwu decyzji:

d_+ : *stawiam na ten sam kolor, co kolor widocznej strony krążka,*
d_- :*stawiam na kolor „przeciwny”,*
decyzja d_+ jest lepsza, daje bowiem dwa razy większe szanse zdobycia punktu niż decyzja d_-. Opisana gra jest więc strategiczno-losowa.

9-43 Po potasowaniu czterech asów z talii kart wyłożono na stół dwie karty rewersami ku górze (a więc bez podglądania). Pozostałe dwie karty także leżą zakryte.
a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie wyłożone karty są czarne?
b) Ktoś podglądnąwszy jedną z wyłożonych kart zdradził Ci, że jest ona czarna. Jakie jest w tej sytuacji prawdopodobieństwo, że obie wyłożone karty są czarne?
c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie wyłożone karty są czarne w sytuacji, gdybyś usłyszał, że ta podglądnięta karta jest pikiem?

Mowa tu o trzech zdarzeniach związanych z losowaniem dwu kart:
$A = \{$*obie wyłożone karty będą czarne*$\}$,
$B = \{$*wśród wyłożonych kart będzie czarna*$\}$,
$C = \{$*wśród wyłożonych kart będzie czarna pikowa*$\}$.
W pytaniu b) chodzi o $P(A|B)$, w pytaniu c) chodzi o $P(A|C)$. Wydaje się, że informacja, jakiej maści jest owa czarna karta, nie ma tu znaczenia, a więc, że oba te prawdopodobieństwa warunkowe są równe. Nie jest to prawda.

Każdy odcinek na rys. 9.7 przedstawia wynik losowania dwu kart. Kolejność wykładanych kart nie ma tu znaczenia. Z rys. 9.7*a*) wynika, że $P(A) = \frac{1}{6}$.



a) *b*) *c*)
rys. 9.7

Rysunek 9.7*b*) przedstawia wyniki, jakie wchodzą w rachubę, gdy wiadomo, że zaszło zdarzenie B. Jest więc $P(A|B) = \frac{1}{5}$. Z rys. 9.7*c*) wynika, że $P(A|C) = \frac{1}{3}$. Kolejny już raz rysunek jawi się jako wygodny środek argumentacji.

9-44 Rozdano karty w bridżu, ale nie jest znany wynik tego rozkładania.
a) Zainteresujmy się jednym z graczy. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia $A = \{$*ów gracz ma co najmniej dwa asy*$\}$?
b) Załóżmy, że gracz, o którym mowa, oznajmił, że ma asa. Jakie jest w tej sytuacji prawdopodobieństwo zdarzenia A?
c) Przypuśćmy, że ów gracz dodał jeszcze, że jest to as pik. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo zdarzenia A?

Oprócz zdarzenia A w zadaniu mowa jest jeszcze o zdarzeniach:
$B = \{$*wśród kart otrzymanych przez gracza jest as*$\}$,

$C = \{$*wśród kart otrzymanych przez gracza jest as pik*$\}$.

W pytaniu b) chodzi o $P(A|B)$, w pytaniu c) zaś o $P(A|C)$. Wydaje się, że informacja, jakiej maści jest posiadany as nie ma tu znaczenia, a więc, że $P(A|B) = P(A|C)$. Wykaż, że nie jest to prawda. Problem, którego dotyczy ostatnie zadanie, nazywa się *klasycznym problemem drugiego asa*.

9-45 Z urny U_{b*c}, w której jest b kul białych i c czarnych, wylosowano równocześnie k kul, gdzie $k < b$ i $k < c$. Nie zdradzono wyniku tego losowania, podano jedynie informację, że wszystkie wylosowane kule są tego samego koloru. Jakie jest w tej sytuacji prawdopodobieństwo, że są to czarne kule?

9-46 Cztery karty: walet, dama, król i as pik, po ich potasowaniu, zostaną rozłożone w rzędzie. Zbadaj stochastyczną niezależność zdarzeń:

$A = \{$*walet poprzedzi damę*$\}$, $B = \{$*król poprzedzi asa*$\}$.

9-47 Z m-krotnym rzutem monetą zwiążmy następujące zdarzenia:

$A_m = \{$*zarówno orzeł, jak i reszka wypadnie co najmniej raz*$\}$,

$B_m = \{$*reszka wypadnie co najwyżej raz*$\}$.

Zbadaj niezależność zdarzeń A_m i B_m dla $m = 2, 3, ...$

9-48 W urnie U_1 jest b_1 kul białych i c_1 czarnych, w urnie U_2 jest b_2 kul białych i c_2 czarnych. Z wylosowanej urny (bez zaglądania do jej wnętrza) będą następnie losowane równocześnie dwie kule. Z takim doświadczeniem losowym zwiążmy następujące zdarzenia:

$A = \{$*dwie wylosowane kule będą różnych kolorów*$\}$,

$B = \{$*co najmniej jedna z wylosowanych kul będzie biała*$\}$,

$C = \{$*co najmniej jedna z wylosowanych kul będzie czarna*$\}$.

a) Zbadaj niezależność stochastyczną zdarzeń A i B,

b) Zbadaj niezależność stochastyczną zdarzeń A i $B \cup C$,

c) Obie wylosowane kule okazały się białe. Jakie jest w tej sytuacji prawdopodobieństwo, że pochodzą one z urny U_j $(j = 1, 2)$?

9-49 W urnie są 3 kule. Wiadomo tylko, że nie wszystkie kule są czarne (a więc: albo wszystkie są więc białe, albo oprócz białych są tam również kule czarne). Losując n razy ze zwracaniem kulę z tej urny za każdym razem uzyskano kulę białą. Jakie jest w tej sytuacji prawdopodobieństwo, że w tej urnie jest j kul czarnych i $3 - j$ białych dla $j = 0, 1, 2$?