

losowe są tym samym modelami procesów decyzyjnych w warunkach ryzyka.

Silne motywacje do intelektualnego wysiłku inspirowane są przez liczne paradoksy, które ujawniają się w trakcie rozwiązywania zadań.

3.1. Zdarzenie w przestrzeni probabilistycznej

Definicja 3.1. Niech (Ω, p) będzie ziarnistą przestrzenią probabilistyczną. Każdy podzbiór zbioru Ω nazywamy *zdarzeniem* w tej przestrzeni. Niech $\mathcal{Z} = 2^\Omega$. Zbiór \mathcal{Z} nazywamy *rodziną zdarzeń pokrewnych*.

Zdarzenia oznaczamy dużymi, początkowymi literami alfabetu łacińskiego. Zdarzenie jest zbiorem. W rodzinie \mathcal{Z} zdarzeń wprowadzamy więc działania \cup , \cap i \setminus , o jakich mowa w teorii zbiorów. Rozważamy zatem *sumę zdarzeń*, *iloczyn zdarzeń*, *różnicę zdarzeń*, *zdarzenia rozłączne* (jako zdarzenia, których iloczyn mnogościowy jest pusty). Znak \setminus , oznaczający różnicę mnogościową, oznaczamy dalej przez $-$. Do tych działań na zdarzeniach stosują się wszystkie prawa rachunku zbiorów.

Do rodziny \mathcal{Z} zdarzeń należą dwa szczególne zbiory: \emptyset , który nazywamy *zdarzeniem niemożliwym* oraz zbiór Ω , który nazywamy *zdarzeniem pewnym*. Pozostałe podzbiory zbioru Ω nazywamy *zdarzeniami losowymi*, albo *prawdopodobnymi*. Jednoelementowe podzbiory zbioru Ω nazywamy *zdarzeniami prostymi* *).

Definicja 3.2. Rodzinę co najmniej dwu zdarzeń w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) , z których każde dwa są rozłączne i których suma jest zdarzeniem pewnym, nazywamy *układem zupełnym zdarzeń*.

Definicja 3.3. Zdarzenia A i B w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) nazywamy *przeciwnymi* jeśli $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = \Omega$. Zdarzenie B nazywamy wówczas przeciwnym do A i oznaczamy przez A' .

Zauważmy, że $A' = \Omega - A$. Jeśli zdarzenia A i B w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) są przeciwne, to $\{A, B\}$ jest układem zupełnym zdarzeń.

3.2. „Zanurzanie” zdarzenia w przestrzeni probabilistycznej jako element fazy matematyzacji

W zadaniach z rachunku prawdopodobieństwa mowa jest na ogół o zdarzeniach związanych z jakimś doświadczeniem losowym. Zdarzenia te określone są wtedy słownym opisem. Formalnie zdarzenia te należy rozpatrywać jako

*) takie zdarzenia należałoby nazywać *zdarzeniami elementarnymi*

podzbiory zbioru Ω , gdzie para (Ω, p) jest modelem probabilistycznym doświadczenia losowego. Słowny opis zdarzenia będziemy w pracy ujmować w nawiasy $\{ \}$.

Przedstawianie słownie opisanego zdarzenia jako podzbioru zbioru Ω nazywamy dalej *zanurzaniem zdarzenia w przestrzeni probabilistycznej*. Zanurzanie zdarzenia w odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej jest istotnym elementem fazy matematyzacji. Niżej zilustrujemy procedurę „zanurzania” tak rozumianego zdarzenia w przestrzeni probabilistycznej.

Założmy, że przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) jest modelem probabilistycznym pewnego doświadczenia losowego. Jeśli A oznacza jakieś zdarzenie związane z tym doświadczeniem losowym, to dla każdego z możliwych wyników doświadczenia można rozstrzygać czy zdarzenie A zaszło, czy też nie, jeśli doświadczenie zakończyło się tym wynikiem. Jeśli wynik ω prowadzi do zajścia zdarzenia A , to mówimy, że *wynik ω sprzyja zdarzeniu A* . W rachunku prawdopodobieństwa każde opisanie słowami zdarzenie przedstawia się jako zbiór wyników sprzyjających temu zdarzeniu. Zdarzenie związane z danym doświadczeniem losowym jest w tym ujęciu podzbiorem zbioru wyników tego doświadczenia. Fakt, że wynik ω sprzyja zdarzeniu A oznacza, że $\omega \in A$.

W wielu rozważanych problemach będzie mowa o pewnej grze. Zdarzenia będziemy starać się określać w języku doświadczenia losowego, jakie przeprowadza się w rozważanej grze, nie zaś w języku gry.

Weźmy pod uwagę grę z udziałem dwóch graczy: G_A i G_B , którzy rzucają na przemian monetą tak długo, aż wypadnie reszka, a zwycięża ten, kto tę reszkę wyrzuci. Jeśli reszka wypadnie po raz pierwszy w nieparzystym rzucie, to zwycięża gracz G_A , jeśli zaś reszka wypadnie po raz pierwszy w parzystym rzucie, to zwycięża gracz G_B . Doświadczenie losowe przeprowadzane w grze to oczekiwanie na reszkę. W zadaniu 2.46 określono model probabilistyczny tego doświadczenia losowego. Jest on parą (Ω, p) , gdzie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ i $p(\omega_k) = (\frac{1}{2})^k$. Przez ω_k oznaczono tu wynik: **reszka wypadnie po raz pierwszy w k -tym rzucie** ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Gracz G_A zwycięży tylko wówczas, gdy zajdzie zdarzenie

$$A = \{\text{reszka wypadnie po raz pierwszy w nieparzystym rzucie}\}.$$

Jeśli oczekiwanie na reszkę zakończy się wynikiem ω_5 , to zajdzie zdarzenie A . Wynik ω_5 sprzyja zdarzeniu A . Zdarzeniu A sprzyja także wynik ω_1 . Wynik ω_{10} nie sprzyja zdarzeniu A . Zdarzenie A zajdzie, ilekroć doświadczenie zakończy się takim wynikiem ω_k , gdzie k jest liczbą nieparzystą. Zdarzeniu A sprzyjają więc wyniki: $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$. W przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) , będącej modelem oczekiwania na reszkę, zdarzenie A jest zbiorem sprzyjających mu wyników tego oczekiwania, a więc $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots\}$.

Gracz G_B zwycięży wtedy (i tylko wtedy), gdy zajdzie zdarzenie

$$B = \{\text{reszka wypadnie po raz pierwszy w parzystym rzucie}\}.$$

W przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) jest $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots\}$.

Zauważmy, że $A \cup B = \Omega$ oraz $A \cap B = \emptyset$. Zdarzenia A i B są przeciwne, a zatem tworzą układ zupełny zdarzeń.

3.1. Oto kilka innych, określonych słownym opisem, zdarzeń związanych z oczekiwaniem na wypadnięcie reszki:

$$C = \{\text{reszka wypadnie po raz pierwszy nie później niż w piątym rzucie}\},$$

$$D = \{\text{reszka wypadnie po raz pierwszy później niż w piątym rzucie}\},$$

$$E = \{\text{reszka wypadnie po raz pierwszy w piątym rzucie}\},$$

$$F = \{\text{reszka wypadnie nie wcześniej niż w trzecim rzucie}\}.$$

Przedstaw te zdarzenia jako podzbiory zbioru Ω wyników oczekiwania na wypadnięcie reszki.

Z opisu słownego wynika natychmiast, że zdarzenia C i D są przeciwne. Zdarzenie E jest zdarzeniem prostym.

W przestrzeni probabilistycznej oczekiwania na reszkę jest:

$$C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}, D = \{\omega_6, \omega_7, \omega_8, \dots\}, E = \{\omega_5\}, F = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \dots\}.$$

3.2. Rzut monetą powtarzany jest tak długo, aż zostaną uzyskane oba wyniki rzutu. Chodzi tu o czekanie, aż po orle wypadnie reszka albo, aż po reszce wypadnie orzeł, a więc o schemat kolekcjonera (kolekcję stanowią tu wyniki rzutu monetą). Zwiążmy z tym doświadczeniem zdarzenie:

$$A_n = \{\text{doświadczenie zakończy się po } n \text{ rzutach}\}.$$

Liczba n może tu być dowolną liczbą naturalną większą od 1. Zanurz zdarzenie A_n w odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej. Wykaż, że nieskończony zbiór $\{A_2, A_3, A_4, \dots\}$ jest układem zupełnym zdarzeń w tej przestrzeni.

3.3. Z m -krotnym rzutem kostką zwiążmy zdarzenie:

$$B_k = \{\text{szóstka wypadnie dokładnie } k \text{ razy}\}, k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Określ przestrzeń probabilistyczną (Ω, p) jako model tego doświadczenia. Przedstaw zdarzenie B_k jako podzbiór zbioru Ω . Wykaż, że $\{B_0, B_1, B_2, \dots, B_m\}$ jest układem zupełnym zdarzeń.

3.4. Rzut monetą powtarzany jest tak długo, aż pięć razy pod rząd wypadnie orzeł (...oooo) albo, aż po reszce orzeł wypadnie cztery razy pod rząd (...roooo). Z tym oczekiwaniem na jedną z dwu serii ooooo i roooo zwiążmy następujące zdarzenia:

$$A = \{\text{seria ooooo pojawi się wcześniej niż seria roooo}\},$$

$$B = \{\text{seria roooo pojawi się wcześniej niż seria ooooo}\},$$

$$C_n = \{\text{czekanie zakończy się po } n \text{ rzutach}\}, n = 5, 6, 7, \dots$$

Zanurz powyższe zdarzenia w modelu probabilistycznym doświadczenia losowego, o jakim tu mowa. Wykaż, że $\{C_5, C_6, C_7, \dots\}$ jest układem zupełnym zdarzeń.

Nietrudno sprawdzić, że $A = \{ooooo\}$ (A jest więc zdarzeniem prostym) oraz że zdarzenia A i B są przeciwne, a zatem $B = \Omega - \{ooooo\}$, gdzie (Ω, p) jest modelem probabilistycznym dla czekania na jedną z dwu serii $ooooo$ i $roooo$. W ten sposób zdarzenie B także zanurzyliśmy w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) . Przedstawiliśmy je jako pewien podzbiór zbioru Ω nie wymieniając wyników, które mu sprzyjają.

W ostatnich zadaniach pojawiły się układy zupełne zdarzeń. Zauważmy, że każdy z tych układów zupełnych zdarzeń jest klasyfikacją zbioru Ω , generowaną przez pewną relację równoważnościową w zbiorze wyników doświadczenia, z którym te zdarzenia są związane. W zadaniu 3.2 dwa wyniki są we wspomnianej relacji, jeśli są ciągami tej samej długości. Analogiczna sytuacja zachodzi dla wyników sprzyjających zdarzeniu C_n z zadania 3.4. W zadaniu 3.3 układ zupełny zdarzeń jest także generowany przez relację równoważnościową w zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^m$. We wszystkich tych zadaniach pojawia się pewna funkcja, która każdemu wynikowi doświadczenia losowego przypisuje pewną liczbę. W zadaniach 3.2 i 3.4 jest to funkcja T , która wynikowi przypisuje jego długość (wymierzaną liczbą wykonanych rzutów monetą), w zadaniu 3.3 jest to funkcja, która każdemu wynikowi m -krotnego rzutu kostką przypisuje liczbę uzyskanych szóstek. Układy zupełne zdarzeń, o których mowa w cytowanych zadaniach, są generowane przez funkcje ze zbioru Ω w zbiór liczb rzeczywistych.

3.3. Definicja prawdopodobieństwa w ziarnistej przestrzeni probabilistycznej

Definicja 3.4. Niech (Ω, p) będzie ziarnistą przestrzenią probabilistyczną. Niech $\mathcal{Z} = 2^\Omega$. *Prawdopodobieństwem* w przestrzeni (Ω, p) nazywamy każdą funkcję $P : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{R}$ określoną następująco:

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{gdy } A = \{\omega\}, \\ \sum_{\omega \in A} p(\omega), & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem co najmniej dwuelementowym.} \end{cases}$$

Liczbę $P(A)$ nazywamy *prawdopodobieństwem zdarzenia* A .

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy także trójkę (Ω, \mathcal{Z}, P) , gdzie $\mathcal{Z} = 2^\Omega$, P zaś jest prawdopodobieństwem na \mathcal{Z} w sensie definicji 3.4.

3.5. Niech (Ω, \mathcal{Z}, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Korzystając z definicji prawdopodobieństwa udowodnij następujące twierdzenia.

- Jeżeli $A = \Omega$, to $P(A) = 1$ (prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe jeden).
- Jeśli zdarzenia A_1, \dots, A_n ($n \geq 2$) są parami rozłączne to,
 $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$.
- Jeżeli $A \in \mathcal{Z}$ i $B \in \mathcal{Z}$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Jeżeli $A \in \mathcal{Z}$ i $A' = \Omega - A$, to $P(A') = 1 - P(A)$ (prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do A jest równe $1 - P(A)$).
- Jeżeli $A \in \mathcal{Z}$, $B \in \mathcal{Z}$ i $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$ (prawdopodobieństwo P jest funkcją monotoniczną).

3.6. Rzut monetą powtarzany jest tak długo, aż wypadnie reszka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

$A = \{\text{reszka wypadnie po raz pierwszy w nieparzystym rzucie}\},$

$B = \{\text{reszka wypadnie po raz pierwszy w parzystym rzucie}\},$

$C = \{\text{reszka wypadnie po raz pierwszy nie później niż w piątym rzucie}\},$

$D = \{\text{reszka wypadnie po raz pierwszy później niż w piątym rzucie}\},$

$E = \{\text{reszka wypadnie po raz pierwszy w piątym rzucie}\},$

$F = \{\text{reszka wypadnie nie wcześniej niż w trzecim rzucie}\}.$

Zdarzenia A, B, C, D, E i F należy rozpatrywać w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) , gdzie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ i $p(\omega_k) = (\frac{1}{2})^k$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$ (por. zadanie 3.1). W tej przestrzeni będącej modelem probabilistycznym dla oczekiwania na reszkę jest: $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots\}$ i $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots\}$.

Z definicji prawdopodobieństwa zdarzenia wynika, że

$$\begin{aligned} P(A) &= p(\omega_1) + p(\omega_3) + p(\omega_5) + \dots = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}, \\ P(B) &= p(\omega_2) + p(\omega_4) + p(\omega_6) + \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwa zdarzeń A i B są (z definicji) sumami pewnych szeregów. Są to szeregi geometryczne, a więc ich sumy można znaleźć za pomocą odpowiednich twierdzeń analizy matematycznej.

W rozważanej przestrzeni probabilistycznej jest $E = \{\omega_5\}$, a więc E jest zdarzeniem prostym. Z definicji prawdopodobieństwa wynika, że

$$P(E) = p(\omega_5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}.$$

Z kolei $C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, a więc definicji prawdopodobieństwa jest

$$P(C) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + p(\omega_4) + p(\omega_5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}.$$

Mamy $F = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \dots\}$, a więc z definicji prawdopodobieństwa zdarzenia wynika, że

$$\begin{aligned} P(F) &= p(\omega_3) + p(\omega_4) + p(\omega_5) + \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Problemy i zadania związane z obliczaniem prawdopodobieństwa zdarzeń będą na ogół dotyczyć zagadnień pozamatematycznych, a więc nie będą sformułowane w języku matematyki. Problem sprawiedliwości gry losowej, czy też problem decyzji dotyczącej udziału w grze, nie są zagadnieniami matematycznymi. Przekład na język matematyki pozamatematycznego problemu (a więc formułowanie matematycznego zadania) oraz organizacja fazy interpretacji (tj. formułowanie wniosków, jakie z rozwiązania matematycznego zadania wynikają dla praktyki) stanowią w tej pracy ważne etapy rozwiązywania zadań. Umiejętność poprawnego przechodzenia przez te etapy jest ważnym elementem wiedzy w zakresie rachunku prawdopodobieństwa. Niżej przedstawiamy plan, według którego będziemy rozwiązywać tak sformułowane zadania na obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia:

1° Rozstrzygnąć, z jakim doświadczeniem losowym wiąże się zdarzenie, którego prawdopodobieństwo należy obliczyć.

2° Skonstruować model probabilistyczny tego doświadczenia losowego.

3° „Zanurzyć” zdarzenie w modelu probabilistycznym, tzn. przedstawić je jako podzbiór zbioru Ω wyników tego doświadczenia.

4° Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia stosując definicję prawdopodobieństwa.

5° Jeśli zadanie dotyczyło sytuacji pozamatematycznej – zinterpretować uzyskane wyniki liczbowe.

3.7. Rzut monetą powtarzany jest tak długo, aż zostaną uzyskane oba wyniki rzutu monetą. Z jakim prawdopodobieństwem to doświadczenie losowe zakończy się po n -tym rzucie ($n = 2, 3, 4, \dots$). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że doświadczenie zakończy się serią ro (zdarzenie A) i prawdopodobieństwo tego, że zakończy się ono serią or (zdarzenie B).

Zbiorem wyników doświadczenia losowego jest

$$\Omega = \{or, ro, oor, rro, ooor, rrrro, ooooo, rrrro, \dots\}.$$

Funkcja p przypisuje wynikowi $\omega \in \Omega$ liczbę $(\frac{1}{2})^k$, jeśli k jest długością wyniku (ciągu) ω . Rozważmy następujące zdarzenia:

$A_n = \{\text{doświadczenie zakończy się po } n\text{-tym rzucie}\}$, $n = 2, 3, 4, \dots$,

$A = \{\text{po reszce wypadnie orzeł}\}$ oraz $B = \{\text{po orle wypadnie reszka}\}$.

Mamy tu: $P(A_n) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^n$, dla $n = 2, 3, 4, \dots$. W przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) jest:

$$A = \{ro, rro, rrrro, rrrro, \dots\}. B = \{or, oor, ooor, ooooo, \dots\}.$$

Zdarzenia A i B są jednakowo prawdopodobne. Prawdopodobieństwa tych zdarzeń można znaleźć jako sumy szeregów geometrycznych. Równość $P(A) = P(B)$ wynika również wprost z pewnych symetrii. Dostrzeganie takich symetrii i ich uzasadnianie oraz wykorzystywanie do racjonalizacji rachunków jest jednym z ważnych aspektów kultury stochastycznej.

3.8. Rzut monetą powtarzany jest w grze tak długo aż: albo wypadnie pięć orłów pod rząd (...oooo) i wówczas zwycięża gracz G_A , albo aż po reszce wypadną cztery orły pod rząd (...roooo) i wtedy zwycięża gracz G_B . Czy jest to gra sprawiedliwa? Jak sprawiedliwość gry należy rozumieć i jak ją uzasadnić na gruncie rachunku prawdopodobieństwa?

W grze przeprowadza się doświadczenie losowe, dla którego model probabilistyczny (Ω, p) określono przy rozwiązywaniu zadania 3.4. Matematyczne zadanie, o jakie tu chodzi, sprowadza się do obliczenia w tej przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) prawdopodobieństw dwu zdarzeń:

$$A = \{\text{seria } ooooo \text{ pojawi się wcześniej niż seria } roooo\},$$

$$B = \{\text{seria } roooo \text{ pojawi się wcześniej niż seria } ooooo\},$$

o których mowa w zadaniu 3.4. Zajście zdarzenia A jest równoznaczne ze zwycięstwem gracza G_A , zajście zdarzenia B — ze zwycięstwem gracza G_B .

Jest $A = \{ooooo\}$, a więc A jest zdarzeniem prostym. Z definicji prawdopodobieństwa dostajemy, że $P(A) = p(ooooo) = \frac{1}{32}$. Zdarzenia A i B są przeciwne ($B = A'$), a zatem (por. zadanie 3.5) $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$.

Zdarzenie B jest 31 razy bardziej prawdopodobne niż zdarzenie A . Prawdopodobieństwa zdarzeń A i B różnią się istotnie. Szanse graczy w opisanej

grze nie są równe. Gra nie jest więc sprawiedliwa. Rozwiązywanie ostatniego zadania jest ilustracją procesu stosowania matematyki, obejmuje bowiem fazę matematyzacji, fazę rachunków i fazę interpretacji.

3.9. Niech $\Omega = \{a, b, c\}$ i $p(a) = \frac{1}{13}$ i $p(b) = 0$ i $p(c) = \frac{12}{13}$. Para (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną ziarnistą. Niech $\mathcal{Z} = 2^\Omega$.

- Określ na \mathcal{Z} prawdopodobieństwo P .
- Czy prawdziwe jest twierdzenie: „jeżeli $P(A) = 1$, to A jest zdarzeniem pewnym”?
- Zweryfikuj twierdzenie: „Jeżeli $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, to $A \cap B = \emptyset$ ”

3.10. Niech (Ω, \mathcal{Z}, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, A i B zaś zdarzeniami w tej przestrzeni. Rozstrzygnij, czy następujące twierdzenia są prawdziwe, czy nie. Jeśli twierdzenie jest fałszywe, to uzasadnij ten fakt.

- Jeżeli $P(A) = 0$, to A jest zdarzeniem niemożliwym.
- Jeżeli $\overline{A} > \overline{B}$, to $P(A) > P(B)$.
- Jeżeli $\overline{A} = k$ i $\overline{\Omega} = s$, to $P(A) = \frac{k}{s}$.
- Jeżeli $P(A) = P(B)$, to zdarzenia A i B są równoliczne.
- Jeżeli $P(A \cup B) = 1$, to zdarzenia A i B są przeciwne.
- Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $P(B) = 1 - P(A)$.

Wszystkie twierdzenia są fałszywe. Dowód tego faktu sprowadza się do konstrukcji odpowiednich kontrprzykładów.

Rozważmy przestrzeń probabilistyczną (Ω, p) określoną następująco:

$\omega \in \Omega$	a	b	c
$p(\omega)$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

Jeśli $A = \{b\}$, to $P(A) = 0$ i $A \neq \emptyset$, a więc twierdzenie a) jest fałszywe.

Niech $A = \{a, b\}$ i $B = \{c\}$. Wtedy $\overline{A} > \overline{B}$ i $P(A) < P(B)$, a zatem twierdzenie b) jest fałszywe.

Dla zdarzenia $A = \{a, c\}$ jest $\overline{A} = 2$ oraz $\overline{\Omega} = 3$ i $P(A) = 1 \neq \frac{2}{3}$, a zatem twierdzenie c) jest także fałszywe.

Weźmy $A = \{a, b\}$ i $B = \{a\}$. Jest wówczas $P(A) = P(B)$ i $\overline{A} \neq \overline{B}$, co dowodzi, że twierdzenie d) jest fałszywe.

Niech $A = \{a\}$ i $B = \{c\}$. Wtedy $P(A \cup B) = 1$ i zdarzenia A i B nie są przeciwne, bo $A \cup B \neq \Omega$. Nie jest zatem prawdziwe twierdzenie e).

Jeśli $A = \{a\}$ i $B = \{b\}$, to jest $A \cap B = \emptyset$ i $0 = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{9}$, a więc twierdzenie f) jest fałszywe.

Jeśli $A = \{a\}$ i $B = \{b\}$, to $A \cap B = \emptyset$ i $0 = P(B) \neq 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Wynika stąd, że twierdzenie g) jest również fałszywe.

Kontrprzykłady zostały skonstruowane za pomocą teoretycznej przestrzeni probabilistycznej. Fakt, czy jest ona modelem jakiegoś doświadczenia nie ma (bo mieć nie może) żadnego znaczenia. Problem weryfikacji twierdzenia dotyczy bowiem świata matematyki. Rozwiązywanie zadania sprowadza się do organizacji fazy dedukcji. Problem dotyczy konstrukcji odpowiednich przestrzeni probabilistycznych. Na ogół szuka się ich wśród modeli probabilistycznych doświadczeń losowych przeprowadzanych za pomocą kostek, monet, czy też urn z kulami (czasem — choć rzadziej — za pomocą ruletek). Tymczasem przykładów, o jakie tu chodzi, nie ma wśród przestrzeni będących modelami takich doświadczeń losowych. Trudności związane z konstruowaniem kontrprzykładów (i ogólnie z organizacją fazy dedukcji) wynikają z tego, że na zajęciach (zwłaszcza w szkole) omawiane są przestrzenie probabilistyczne wyłącznie jako modele pewnych doświadczeń. Zbyt mało uwagi przywiązuje się do faktu, że przestrzeń probabilistyczna jest pojęciem matematycznym i jako takie nie musi mieć żadnych odniesień do rzeczywistości. Dotykamy tu ważnego w nauczaniu matematyki problemu relacji: *świat matematyki – świat realny*.

Kontrprzykładów, o jakie chodzi w ostatnim zadaniu, dostarcza również przestrzeń probabilistyczna opisana w zadaniu 3.9.

3.4. Prawdopodobieństwo klasyczne

Twierdzenie 3.1. Jeżeli przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) jest klasyczna i $\overline{\overline{\Omega}} = s$ i $A \subset \Omega$ i $\overline{\overline{A}} = k$, to $P(A) = \frac{k}{s}$.

Twierdzenie to wynika wprost z definicji prawdopodobieństwa. Nazywamy je *twierdzeniem klasycznym*. Można je sformułować następująco:

Jeżeli wszystkie wyniki doświadczenia losowego są jednakowo prawdopodobne, to

$$P(A) = \frac{\text{liczba wyników sprzyjających zdarzeniu } A}{\text{liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia}} .$$

3.11. W Zakładach Specjalnych losuje się pięć razy bez zwracania kulę z urny o 45 ponumerowanych kulach. Gracz skreślając na kuponie 5 numerów, stawia na pewne zdarzenie związane z tym doświadczeniem losowym. O jakie zdarzenie chodzi? Jakie jest prawdopodobieństwo tego zdarzenia? W jakiej przestrzeni probabilistycznej należy je obliczać?

3.12. W Dużym Lotku losuje się jednocześnie sześć kul z urny o 49 ponumerowanych kulach (mówimy krótko, że losuje się 6 liczb z 49).

- a) Załóżmy, że gracz wypełnił na kuponie jedno pole. Skreślił on 6 liczb, a więc postawił na pewne zdarzenie związane z tym doświadczeniem losowym. O jakie zdarzenie chodzi? W jakiej przestrzeni probabilistycznej należy je rozpatrywać? Oblicz prawdopodobieństwo tego zdarzenia.
- b) Załóżmy, że gracz wypełnił 4 pola, w taki sposób, że żadne dwa pola nie są wypełnione tak samo. Postawił więc na pewne zdarzenie związane z tym doświadczeniem losowym. O jakie zdarzenie chodzi? Oblicz prawdopodobieństwo tego zdarzenia?

W Dużym Lotku kule losowane są jednocześnie, a więc wynik losowania jest sześćelementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, 49\}$. Modelem probabilistycznym tego losowania jest para (Ω, p) , gdzie Ω jest zbiorem sześćelementowych kombinacji zbioru $\{1, 2, \dots, 49\}$. Wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne i jest ich $\binom{49}{6}$, a więc $p(\omega) = \frac{1}{\binom{49}{6}}$ dla każdego $\omega \in \Omega$.

Jeśli gracz wypełnił jedno pole, to „trafi szóstkę” jedynie wtedy, gdy zostaną wylosowane te liczby, które zostały skreślone. Rozważmy zdarzenie $A = \{\text{zostaną wylosowane liczby skreślone przez gracza}\}$. Zdarzeniu A sprzyja tylko jeden wynik, a więc w przestrzeni probabilistycznej jest to zdarzenie proste. $P(A) = \frac{1}{\binom{49}{6}}$. W tej sytuacji można mówić, że gracz stawia w istocie na wynik losowania.

Założmy, że gracz G skreślił liczby w czterech polach. Oznaczmy przez w_j zbiór liczb skreślonych w j -tym polu, $j = 1, 2, 3, 4$. Każdy z tych zbiorów jest możliwym wynikiem losowania sześciu liczb z 49. Weźmy pod uwagę zdarzenie

$$B = \{\text{gracz } G \text{ trafi szóstkę}\}.$$

Gracz G trafi szóstkę, gdy losowanie zakończy się jednym z czterech wyników: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$. W klasycznym modelu probabilistycznym losowania sześciu numerów w Dużym Lotku mamy $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, a więc $P(B) = \frac{4}{\binom{49}{6}}$.

3.13. Oblicz, z jakim prawdopodobieństwem gracz, który wypełnił pojedyncze pole w zakładach Dużego Lotka (skreślając 6 liczb z 49), uzyska 5 trafień, z jakim 4 a z jakim 3 trafienia? Jakie jest prawdopodobieństwo, że gracz nie uzyska ani jednego trafienia?

3.14. Oblicz jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania pięciu, czterech i trzech trafień w Express Lotku i w Zakładach Specjalnych w sytuacji gdy:

- a) gracz wypełnił jedno pole,
 b) gracz wypełnił maksymalną liczbę pól dla danego typu zakładu.

3.15. Na rysunku 1.12 przedstawiono regulamin wygranych w grze Numerek. Oblicz jakie jest prawdopodobieństwo, że gracz, który w grze w Numerek postawił na liczbę 7 uzyska wygraną. Dla każdego z siedmiu stopni wygranych znajdź

prawdopodobieństwo, że gracz uzyska wygraną danego stopnia.

3.16. W grze Numerek wysokości wygranej poszczególnych stopni są różne. Najwyższa wygrana jest wygraną I stopnia. Im niższy stopień tym niższa wygrana. Czy taki sposób premiowania wygranych można uzasadnić na gruncie matematyki?

Prawdopodobieństwa uzyskania wygranej I stopnia, II stopnia i III stopnia są równe. Oznacza to, że gracz ma równe szanse na uzyskanie wygranej każdego z tych trzech stopni. Jeśli wysokości wygranych uzależnić od wielkości prawdopodobieństwa, to gracz powinien wygrywać tyle samo w każdym z tych trzech przypadków. Regulamin wypłat wygranych różnicuje wysokości wygranych dla tych trzech stopni.

3.17. Analizując wyniki wielu losowań numerów Dużego Lotka (6 z 49), zauważ, jak często wśród wylosowanych liczb znajdują się przynajmniej dwie kolejne (sąsiednie) liczby. Jest to raczej zaskakujący fakt. Aby to wytłumaczyć na gruncie matematyki wystarczy obliczyć prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia. Co to za zdarzenie? Oblicz jego prawdopodobieństwo.

Ostatnie zadanie może uczeń (student) sformułować sam. Tego typu zadania dydaktyka matematyki zalicza do problemów kreowanych *refleksją a posteriori* (por. [76]).

Rozważmy następujące zdarzenia związane z losowaniem 6 liczb z 49 w Dużym Lotku:

$$A = \{\text{zostaną wylosowane co najmniej dwie sąsiednie liczby}\},$$

$$A' = \{\text{wśród wylosowanych liczb nie będzie liczb sąsiednich}\}.$$

Z rozwiązania zadania 1.23 wnioskujemy, że $\overline{A'} = \binom{44}{6}$, więc

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}} \approx 0,495.$$

Z przeprowadzonych obserwacji wynika, że co najmniej dwie sąsiednie liczby trafiają się w losowaniu sześciu numerów Dużego Lotka stosunkowo często. Z rozwiązania ostatniego zadania wynika, że prawdopodobieństwo tego, że wśród sześciu wylosowanych liczb znajdą się co najmniej dwie kolejne liczby jest bliskie $\frac{1}{2}$. Nie ma więc nic zaskakującego w fakcie, że prawie w połowie dużej liczby losowań są co najmniej dwie sąsiednie liczby

3.18. Wypełniłeś dwa pojedyncze kupony totolotka (skreślając na każdym 6 liczb z 49) z myślą o głównej wygranej. Albo oba kupony wezmą udział w najbliższym losowaniu (np. w środę), albo każdy w innym (jeden w środę, drugi w sobotę). Która z decyzji jest korzystniejsza dla Ciebie?

3.19. Weźmy pod uwagę następujący mini-lotek. Z pięciu numerów: 1, 2, 3, 4 i 5 losowane są dwa. Zanim to nastąpi gracz stawia na wynik tego losowania (skreślając na kuponie dwie liczby). Gracz zdobywa punkt, jeśli postawił na te liczby, które zostały następnie wylosowane. Gracz wypełnił dwa kupony. Albo oba wezmą udział w jednym losowaniu, albo każdy w innym. To dwie decyzje. Która z nich jest dla gracza korzystniejsza?

Problem może być ilustracją procesu podejmowania decyzji w warunkach ryzyka. Narzędziem wylaniania optymalnej decyzji może tu być pojęcie prawdopodobieństwa zdarzenia.

Przyjmijmy, że gracz skreślił na pierwszym kuponie liczby 1 i 2, a na drugim 3 i 4. Przyjęcie tych założeń nie zawęży ogólności prowadzonego rozumowania. W rachubę wchodzi tu dwie decyzje:

d_1 — obydwie kupony wezmą udział w jednym losowaniu,

d_2 — jeden kupon weźmie udział w pierwszym losowaniu, drugi kupon weźmie udział w drugim losowaniu.

Zbiór $\mathcal{D} = \{d_1, d_2\}$ jest zbiorem dopuszczalnych decyzji. W zależności od decyzji i od wyniku losowania dwu liczb, gracz albo zdobędzie punkt, albo nie. Mowa tu o pewnej funkcji W , która w teorii procesów decyzyjnych nazywa się funkcją korzyści, albo korzyścią (por. [95], s.). Po podjęciu decyzji, korzyść jest funkcją jednej zmiennej, a mianowicie wyniku pewnego doświadczenia losowego. Oznaczmy przez W_j korzyść odpowiadającą decyzji d_j , $j = 1, 2$.

Założmy, że gracz G podjął decyzję d_1 . Korzyść W_1 zależy od wyniku losowania dwu liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Te wyniki są stanami świata zewnętrznego, których w momencie podejmowania decyzji gracz (tj. podmiot podejmujący decyzję) nie zna. Można jedynie ocenić ich prawdopodobieństwa.

Niech $j*k$ oznacza wynik: wylosowane kule mają numery j i k ($j, k = 1, 2, 3, 4, 5$ i $j < k$), $j*k$ jest tu prezentacją kombinacji $\{j, k\}$ zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Mamy tu przestrzeń probabilistyczną (Ω_1, p_1) , gdzie

$$\Omega_1 = \{1*2, 1*3, 1*4, 1*5, 2*3, 2*4, 2*5, 3*4, 3*5, 4*5\}$$

i $p_1(\omega) = \frac{1}{10}$ dla każdego $\omega \in \Omega_1$.

Korzyść W_1 przyjmie wartość 1 dla wyników 1*2 i 3*4, dla pozostałych wyników ta korzyść przyjmuje wartość 0. Rozważmy zdarzenie

$A_1 = \{\text{korzyść odpowiadająca decyzji } d_1 \text{ będzie dodatnia}\}$.

Niech P_1 będzie prawdopodobieństwem w przestrzeni (Ω_1, p_1) . W klasycznej przestrzeni probabilistycznej (Ω_1, p_1) jest $A_1 = \{1*2, 3*4\}$, a więc $P_1(A_1) = \frac{2}{10}$.

Założmy, że gracz podjął decyzję d_2 . Teraz mamy do czynienia z nową przestrzenią probabilistyczną. Jest ona modelem dwukrotnego losowania dwu liczb

ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Jest to zatem produkt kartezjański modeli probabilistycznych dwu losowań dwu liczb w opisanym mini-lotku. Niech $\Omega^* = \Omega \times \Omega$, gdzie Ω jest zbiorem wyników doświadczenia rozważanego przy decyzji d_1 oraz niech P_2 będzie prawdopodobieństwem w przestrzeni (Ω^*, p^*) .

		1*2	1*3	1*4	1*5	2*3	2*4	2*5	3*4	3*5	4*5	←wynik I losowania
1*2		×										
1*3		×										
1*4		×										
1*5		×										
2*3		×										
2*4		×										
2*5		×										
3*4		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
3*5		×										
4*5		×										
↑												
												wynik II losowania

rys. 3.1.

Na rysunku 3.1 każde ze 100 oczek otrzymanej sieci reprezentuje jeden wynik dwukrotnego losowania dwu liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne. Korzyść W_2 odpowiadająca decyzji d_2 przyjmuje wartości 0, 1 lub 2. Weźmy pod uwagę zdarzenie

$$A_2 = \{\text{korzyść } W_2 \text{ przyjmie wartość dodatnią}\}.$$

Oczka sieci oznaczone znakiem \times reprezentują wyniki sprzyjające zdarzeniu A_2 . Model jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną, więc $P_2(A_2) = \frac{19}{100}$. Mamy zatem $P_2(A_2) = \frac{19}{100} < \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = P_1(A_1)$, a więc dla gracza korzystniej jest, gdy kupony biorą udział w jednym losowaniu.

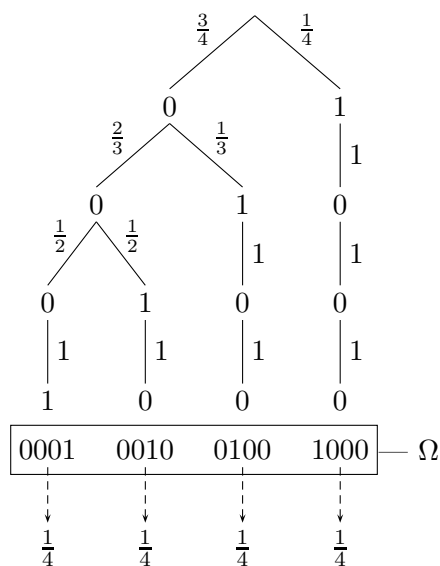
Prawdopodobieństwo zdarzenia stało się w opisanej sytuacji matematycznym narzędziem wylaniania optymalnej decyzji w warunkach ryzyka. Tworzenie pewnego matematycznego modelu dla procesu podejmowania decyzji, wskazywanie dopuszczalnych decyzji, konstruowanie modelu probabilistycznego dla sytuacji, w której podjęto daną decyzję, wylanianie zdarzeń, których prawdopodobieństwo jest pewną charakterystyką danej decyzji itd. należy tu traktować jako pewne aspekty fazy matematyzacji.

3.20. Z grona s osób trzeba wylosować jedną, dając każdej równe szanse. Często robi się to za pomocą zapalek. Organizator losowania trzyma w ręce s zapalek, wśród których jedna jest bez główki. Zapalke są trzymane w ten sposób, że uczestnicy losowania nie widzą tych części zapalek, gdzie jest lub była główka. Osoby, spośród których należy wylosować jedną, kolejno wyciągają zapalke, a ta która wylosuje zapalke bez główki uważana jest za wylosowaną.

- Czy losowanie zapalkami jest nietendancyjne, tzn. czy daje każdemu z uczestników jednakowe szanse? Jak to uzasadnić na gruncie matematyki?
- Jak inaczej zorganizowałbyś nietendancyjne losowanie jednej z grona s osób?

Przedstawimy rozwiązanie dla $s = 4$. Opisane losowanie kończy się z chwilą wyciągnięcia zapalke bez główki. Może się wydawać, że losowanie to nie jest sprawiedliwe, gdyż osoba wyciągająca zapalke jako pierwsza, zawsze uczestniczy w losowaniu, natomiast osoba ostatnia w kolejce do losowania ma niewielkie szanse na to, że w ogóle będzie wyciągać zapalke. Zmieńmy nieco procedurę losowania, tak aby w losowaniu zawsze uczestniczyły wszystkie osoby. Załóżmy, że każda z osób, jak poprzednio, losuje zapalke, ale nie ujawnia faktu czy wylosowana zapalke ma główke, czy nie. Po wylosowaniu ostatniej zapalke stwierdza się kto został wylosowany. Szanse poszczególnych osób, na to że zostaną wylosowane za pomocą pierwszej jak i drugiej procedury są identyczne. Zapropionowana zmiana wpływa jedynie na czas trwania losowania.

Oznaczmy cyfrą 1 zapalke bez główki a cyfrą 0 — zapalke z główką. Przy tej umowie przebieg zmodyfikowanego losowania i wszystkie możliwe jego wyniki opisuje drzewo z rysunku 3.2. Pod każdą gałęzią wpisano wynik tego losowania (jako protokół z jego przebiegu).



Każdy wynik losowania jednoznacznie określa wylosowaną osobę. Wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne, a więc każda z osób ma równe szanse. Przedstawione rozumowanie można łatwo uogólnić na przypadek s osób.

Losowanie zapałkami można zastąpić losowaniem bez zwracania kuli z urny o trzech kulach białych i jednej czarnej (w przypadku s osób jest to losowanie z urny o $s - 1$ kulach białych i jednej czarnej). Losowanie to można realizować na dwa sposoby:

- osoby kolejno losują kule z urny i za wylosowaną uważana jest osoba, która wylosuje kulę czarną,
- osoby zostają ponumerowane, z urny losuje się kolejno kule aż urna będzie pusta, a za wylosowaną uznajemy osobę, której numer jest taki jak numer etapu, na którym wylosowano kulę czarną.

3.21. Oceń czy następujące procedury losowania dwuosobowej reprezentacji z grona 4 osób są sprawiedliwe.

- a) Bierzymy cztery zapałki, wśród których dwie zapałki mają odłamaną główkę. Osoby, spośród których należy wylosować dwie, kolejno wyciągają zapałkę tak długo, aż obydwie zapałki bez główki zostaną wyciągnięte. Osoby, które wyciągną zapałki bez główki uważane są za wylosowane.
- b) Bierzymy cztery zapałki, w tym jedną bez główki. Najpierw losuje się jedną z 4 osób. Następnie bierzemy trzy zapałki — dwie z główką i jedną bez — i z grona pozostałych trzech osób losujemy za pomocą zapałek jedną.
- c) Jedna z czterech zapałek ma odłamaną główkę. Przed losowaniem osoby ustawiają się w koło. Następnie, począwszy od ustalonej osoby, uczestnicy losowania kolejno (np. zgodnie z ruchem wskazówek zegara) wyciągają zapałki. Za wylosowane uznajmy następujące dwie osoby: tę, która wyciągnęła zapałkę bez główki oraz następną w kolejce.

Rozważ następujące przypadki:

- osoby ustawiono w koło w porządku leksykograficznym,
- o kolejności ustawienia osób zdecydowało nietendancyjne losowanie.

Przyjmijmy oznaczenia tak jak poprzednio i załóżmy, że osoby losują zapałki w kolejności: A, B, C i D.

Rozważmy pierwszy sposób losowania. Konstrukcję probabilistycznego modelu dla tej procedury opisuje drzewo z rysunku 3.3.

Rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze Ω jest następującą funkcją p :

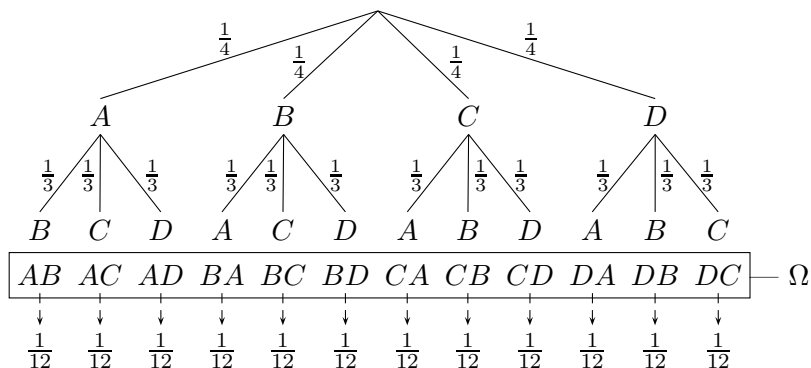
$\omega \in \Omega$	11	011	101	0011	0101	1001
$p(\omega)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Z losowaniem zwiążmy następujące zdarzenia

- $A = \{\text{zostanie wylosowana osoba } A\},$
- $B = \{\text{zostanie wylosowana osoba } B\},$
- $C = \{\text{zostanie wylosowana osoba } C\},$

Każda z osób ma zatem równe szanse na to, że zostanie wylosowana. Ponadto każde dwie osoby mają równe szanse na wylosowanie. Losowanie można więc uznać za nietendycyjne.

Rozważmy drugi sposób losowania. Skonstruujmy probabilistyczny model dla tego losowania. Przy konstrukcji modelu wykorzystamy fakt, że losowanie za pomocą zapalek jednej osoby spośród s osób jest nietendycyjne.

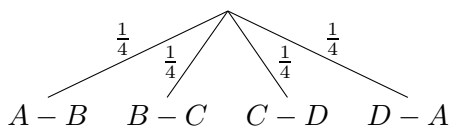


rys. 3.4.

$$\Omega = \{AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CD, CB, DA, DB, DC\}$$

Z symetrii drzewa stochastycznego wynika, że w tej sytuacji każda z osób ma równe szanse i każde dwie osoby mają równe szanse. Wynika stąd, że pierwszy sposób losowania można zastąpić drugim i na odwrót.

Rozważmy trzeci sposób losowania. Skonstruujmy jego probabilistyczny model.



rys. 3.5.

$$\Omega = \{A - B, B - C, C - D, D - A\}$$

Wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne. Każda z osób ma równe szanse ale nie każde dwie osoby mają równe szanse na wylosowanie. Narzucenie kolejności losowania przez pewien porządek powoduje, że pewne pary osób np. A i C nie mogą nigdy zostać wylosowane. Mamy tu więc do czynienia z sytuacją, gdy każda z osób ma równe szanse na wylosowanie, ale nie każde dwie osoby mają takie same szanse na wylosowanie.

Trzeciej procedury losowania nie można zastąpić ani pierwszą ani drugą. Zmodyfikujmy tę procedurę zamieniając założenie: *osoby zostały w pewien*

sposób ustawione, na założenie: *o ustawieniu osób zdecydowało nietendancyjne losowanie*. Łatwo sprawdzić, że przy nowym założeniu każdy z trzech opisanych sposobów można zastąpić jednym z dwu pozostałych.

3.22. Zaproponuj nietendancyjne losowanie za pomocą zapałek k osobowej delegacji spośród s osób. Poprawność zaproponowanej metody uzasadnij formułując i rozwiązując odpowiednie zadanie z rachunku prawdopodobieństwa.

3.23. Z grona s osób ($s > 1$) trzeba wylosować jedną dając każdej równe szanse. Postanowiono to robić za pomocą „marynarza” (por. zad. 1.30). Każda z s osób na dany znak jednocześnie wystawia pewną liczbę palców jednej ręki. Następnie zlicza się wystawione palce i począwszy od pewnej osoby odlicza kolejno ich liczbę jak w wyliczance.

- Niech $s = 2$. Czy w tej sytuacji losowanie jest nietendancyjne? Czy szanse na wylosowanie danej osoby zależą od tego, od kogo zaczyna się odliczać?
- Wykaż, że dla $s = 5$ szanse każdej osoby nie zależą od tego, od kogo zaczyna się odliczać.
- Wykaż, że w przypadku $s = 6$ losowanie „marynarzem” nie daje osobom równych szans.
- Czy są inne liczby osób, przy których losowanie „marynarzem” jest też tendancyjne?

Załóżmy, że $s = 2$. Każda z osób może wystawić od 1 do 5 palców. Przyjmujemy, że o tym, ile palców wystawia każda z osób rozstrzyga przypadek i że dla każdej z osób, każda liczba od 1 do 5 może być z jednakowym prawdopodobieństwem wystawiona przez tę osobę. Ten postulat „jednakowego prawdopodobieństwa” wydaje się być w tej sytuacji naturalny. Wystawianie palców prawej ręki przez dwie osoby jest zatem doświadczeniem losowym. Wspomniany postulat pozwala nam określić jego model probabilistyczny. Ponomerujemy osoby. Każde oczko w tabeli na rys. 3.6 można interpretować jako wynik tego doświadczenia. W przecięciu się j -tego wiersza i k -tej kolumny wpisano sumę liczb palców wskazanych przez obie osoby.

	1	2	3	4	5	← liczba palców
1	2	3	4	5	6	wskazanych przez
2	3	4	5	6	7	pierwszą osobę
3	4	5	6	7	8	
4	5	6	7	8	9	
5	6	7	8	9	10	
↑						liczba palców wskazanych przez drugą osobę

rys. 3.6.

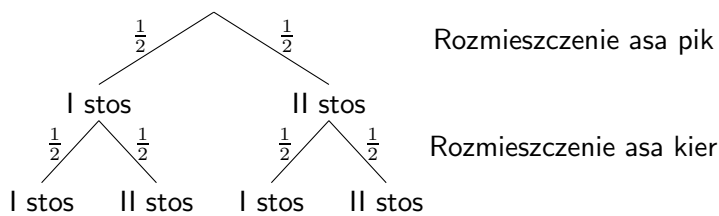
Założmy, że odliczanie rozpocznie się od pierwszej osoby i rozważmy zdarzenie $A_j = \{\text{zostanie wylosowana } j\text{-ta osoba}\}$, dla $j = 1, 2$. Spośród 25 jednakowo prawdopodobnych wyników 12 sprzyja zdarzeniu A_1 a 13 wyników zdarzeniu A_2 , a więc $P(A_1) < P(A_2)$. W opisanym losowaniu szanse drugiej osoby są większe niż osoby pierwszej. Losowanie nie jest nietendencyjne.

W losowaniu „marynarzem” jednej spośród s osób ponumerowanych od 1 do s przeprowadza się pewne doświadczenie losowe. Jego wynik jest s -wyrazowym ciągiem o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wyraz j -ty ciągu oznacza liczbę palców wskazanych przez j -tą osobę. Każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny. Wszystkich wyników jest 5^s .

Założmy, że liczba łącznie wystawionych palców będzie odliczana według numeracji osób i rozważmy zdarzenie $A_j = \{\text{zostanie wylosowana } j\text{-ta osoba}\}$, dla $j = 1, 2, \dots, s$. Warunkiem koniecznym na to, aby losowanie było nietendencyjne, jest aby każdemu ze zdarzeń A_j sprzyjało tyle samo wyników. Liczba s musi być zatem dzielnikiem liczby 5^s . Warunek ten jest spełniony jedynie w sytuacji gdy s jest naturalną potęgą liczby 5. Jest to tylko warunek konieczny. Z tego, że s jest naturalną potęgą liczby 5 nie wynika, że losowanie jest sprawiedliwe.

3.24. Talię 52 kart po potasowaniu rozdzielono na dwa stosy po 26 kart w każdym stosie. Oblicz jakie jest prawdopodobieństwo, że as kier i as pik znajdą się w tym samym stosie. Oceń poprawność następujących rozwiązań tego zadania.

Rozwiązanie 1. W talii 52 kart ustalmy dwie karty: asa kier i asa pik. Przeanalizujmy jak te dwa asy mogą zostać rozmieszczone w dwóch stosach. W tym celu posłużmy się następującym drzewem stochastycznym.



rys. 3.7.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, gdzie:

ω_1 – as pik i as kier trafią do stosu I,

ω_2 – as pik trafi do stosu I, a as kier do stosu II,

ω_3 – as pik trafi do stosu II, a as kier do stosu I,

ω_4 – as pik i as kier trafią do stosu II.

W modelu opisanym za pomocą drzewa stochastycznego, zdarzeniu $A = \{\text{obydwa asy trafią do tego samego stosu}\}$ sprzyjają 2 spośród czterech jednakowo praw-

dopodobnych wyników. Zatem $P(A) = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie 2. Zauważmy, że aby podzielić talię 52 kart na dwa równoliczne stosy wystarczy z niej wylosować 26 kart, pozostałe 26 kart potraktujemy jako drugi stos. Niech Ω będzie zbiorem 26-elementowych podzbiorów zbioru 52 kart. W tej sytuacji zdarzenie: $A = \{\text{obydwa asy trafią do tego samego stosu}\}$ można przedstawić jako $B \cup C$, gdzie

$B = \{\text{wśród wylosowanych 26 kart znajdują się: as kier i as pik}\},$

$C = \{\text{wśród wylosowanych 26 kart nie będzie asa kier i asa pik}\}.$

Zdarzenia B i C są rozłączne, a więc

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{\binom{50}{24}}{\binom{52}{26}} + \frac{\binom{50}{26}}{\binom{52}{26}} \approx 0,45 \neq \frac{1}{2}.$$

W zacytowanych rozwiązaniach uzyskano różne wyniki liczbowe. Wynika stąd, że co najmniej jedno z tych rozwiązań jest błędne. Pojawia się tu problem zgodności skonstruowanego modelu probabilistycznego z doświadczeniem, o którym mowa w zadaniu. W rozwiązaniu pierwszym w istocie skonstruowano model dla rozmieszczania dwóch asów na dwóch miejscach (stosach), nie uwzględniając pozostałych kart. To rozwiązanie nie jest poprawne, bo model nie jest właściwy. Poprawne jest natomiast rozwiązanie 2.

3.5. Prawdopodobieństwo zdarzenia jako narzędzie rozstrzygnięcia sprawiedliwości pewnych gier losowych. Organizacja fazy matematyzacji i fazy interpretacji

Pojęcie „sprawiedliwości gry” jest pojęciem pozamatematycznym. W tym rozdziale proponujemy matematyczne kryterium pozwalające rozstrzygać sprawiedliwość pewnych gier losowych. Chodzi tu o gry, w których uczestniczy ustalona liczba graczy. Każdy z graczy stawia na zdarzenie (każdy na inne) związane z doświadczeniem losowym przeprowadzanym w grze. Zdarzenia, na które gracze stawiają, tworzą układ zupełny zdarzeń. Tego typu gra jest sprawiedliwa, jeśli prawdopodobieństwa wszystkich zdarzeń, na które gracze stawiają, są równe. Prawdopodobieństwo zdarzenia jest tu więc matematycznym narzędziem rozstrzygnięcia, a najpierw definiowania sprawiedliwości gry losowej.

Chodzi tu o szczególny typ gry losowej, różniącej się od gier typu „lotto”, gdzie liczba graczy jest nieograniczona i każdy gracz może stawiać na dowolne zdarzenie związane z doświadczeniem przeprowadzanym w grze.

3.25. W urnie jest b kul białych, c czarnych i jedna zielona. W grze, w której uczestniczy trzech graczy: G_A , G_B i G_C , losuje się jednocześnie dwie kule z tej urny. Jeśli obie wylosowane kule są białe, to zwycięża gracz G_A , jeśli obie

wylosowane kule są czarne, to zwycięża gracz G_B , a gdy wylosowane kule są różnych kolorów, to zwycięża gracz G_C .

- a) Niech $b = c = 2$. Dla każdego z graczy oblicz prawdopodobieństwo, że on zwycięży w takiej grze.
- b) Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby b i c , dla których gra jest sprawiedliwa? Jak należy rozumieć sprawiedliwość takiej gry?

W drugiej części zadania należy zbadać, czy istnieją takie liczby b i c , aby gra była sprawiedliwa. Jest oczywiste, że w urnie muszą być co najmniej dwie kule białe i co najmniej dwie kule czarne. Oznaczmy wyniki losowania dwu kul:

ω_0 – obie wylosowane kule będą białe,

ω_1 – obie wylosowane kule będą czarne.

ω_2 – jedna wylosowana kula będzie biała i jedna czarna,

ω_3 – jedna wylosowana kula będzie biała i jedna zielona,

ω_4 – jedna wylosowana kula będzie czarna i jedna zielona,

Przy tej umowie $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze Ω jest funkcją p , określoną następująco:

$$p(\omega_0) = \frac{b(b-1)}{(b+c+1)(b+c)}, \quad p(\omega_1) = \frac{c(c-1)}{(b+c+1)(b+c)},$$

$$p(\omega_2) = \frac{2bc}{(b+c+1)(b+c)}, \quad p(\omega_3) = \frac{2b}{(b+c+1)(b+c)},$$

$$p(\omega_4) = \frac{2c}{(b+c+1)(b+c)}.$$

Z doświadczeniem losowym przeprowadzanym w grze zwiążmy następujące zdarzenia:

$A = \{\text{obie wylosowane kule będą białe}\},$

$B = \{\text{obie wylosowane kule będą czarne}\},$

$C = \{\text{Każda z dwu wylosowanych kul będzie innego koloru}\}.$

W przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) mamy: $A = \{\omega_0\}$, $B = \{\omega_1\}$, $C = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, a więc

$$P(A) = \frac{b(b-1)}{(b+c+1)(b+c)}, \quad P(B) = \frac{c(c-1)}{(b+c+1)(b+c)},$$

$$P(C) = \frac{2bc + 2b + 2c}{(b+c+1)(b+c)}.$$

Aby gra była sprawiedliwa musi zachodzić równość: $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, z której uzyskujemy następujący układ warunków:

$$\begin{cases} P(A) = P(C), \\ P(B) = P(C), \end{cases}$$

prowadzący do następującego układu równań:

$$\begin{cases} b^2 - 2bc - 3b - 2c = 0, \\ c^2 - 2bc - 3c - 2b = 0. \end{cases}$$

Ostatni układ równań nie ma rozwiązania w zbiorze liczb całkowitych dodatnich, a więc nie istnieją takie liczby b i c , dla których gra jest sprawiedliwa.

Oto inna, prostsza argumentacja. Z faktu iż $P(A) = P(B)$ wynika, iż $a = c$. Z tego, że $P(A) = P(C)$ wynika równanie $b^2 + 5b = 0$, które nie ma rozwiązania w zbiorze liczb całkowitych dodatnich.

W zadaniu chodzi o poszukiwanie wartości parametrów, przy których prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń spełniają określone warunki. Przedstawimy jeszcze kilka zadań, w rozwiązaniach których również wyznacza się pewne parametry.

3.26. W urnie U są 3 kule białe i 6 czarnych, a w urnie V — 4 kule czarne i 4 białe. W grze losuje się jednocześnie dwie kule z jednej z tych urn. Zwycięzasz, gdy wylosowane kule są jednakowego koloru, gdy są to kule różnych kolorów — zwycięża twój przeciwnik w grze. Masz prawo zdecydować, z której urny będą losowane kule. Jaką podejmiesz w tej sytuacji decyzję? Odpowiedź uzasadnij.

3.27. W urnie jest 6 kul czarnych i dwie białe. W grze, w której uczestniczy dwóch graczy: G_A i G_B , losuje się jednocześnie dwie kule z tej urny. Jeśli wylosowane kule są tego samego koloru, to zwycięża gracz G_A , gdy wylosowane kule są różnych kolorów to zwycięża gracz G_B .

- a) Dla każdego z graczy oblicz prawdopodobieństwo jego zwycięstwa.
- b) Ile należy dołożyć kul białych do powyższej urny, aby szanse graczy były równe?

3.28. Rozważmy następującą grę z udziałem trzech graczy: G_A , G_B i G_C . W urnie znajduje się n kul białych, $2n$ czarnych i $3n$ zielonych. Z tej urny losuje się trzy kule. Jeśli wylosowane kule są tego samego koloru, to zwycięża gracz G_A , gdy każda innego koloru gracz G_B , w pozostałych przypadkach gracz G_C . Rozstrzygnij, czy taka gra jest sprawiedliwa.

Z doświadczeniem losowym przeprowadzanym w grze zwiążmy następujące zdarzenia:

$A = \{\text{wszystkie wylosowane kule będą tego samego koloru}\},$

$B = \{\text{każda z wylosowanych kul będzie innego koloru}\},$

$C = \{\text{dwie wylosowane kule będą tego samego koloru, jedna innego}\}.$

Prawdopodobieństwa zdarzeń wynoszą odpowiednio:

$$P(A) = \frac{6n^2 - 7n + 2}{(6n - 2)(6n - 1)}, \quad P(B) = \frac{6n^2}{(6n - 2)(6n - 1)},$$

$$P(C) = \frac{14n^2 - 11n}{(6n - 2)(6n - 1)}.$$

W opisanej grze zwycięży gracz G_A , gdy zajdzie zdarzenie A , zwycięży gracz G_B , gdy zajdzie zdarzenie B , zwycięży gracz G_C , gdy zajdzie zdarzenie C . Nietrudno zauważyć, że dla każdej liczby naturalnej n jest $P(B) > P(A)$, a więc gra nie jest sprawiedliwa.

3.29. W urnie znajdują się kule czarne i białe. W grze z udziałem dwóch graczy: G_A i G_B , losuje się dwa razy bez zwracania kulę z tej urny. Jeśli obydwie wylosowane kule będą czarne, to zwycięża gracz G_A , w pozostałych przypadkach zwycięża gracz G_B .

- Ile co najmniej kul czarnych powinno być w urnie, aby taka gra była sprawiedliwa?
- Odpowiedz na powyższe pytanie, w sytuacji gdy wiadomo, że liczba kul białych jest parzysta.

3.30. Rozważ analogiczne problemy, jak w poprzednim zadaniu, w sytuacji gdy kule losowane są ze zwracaniem.

Oznaczmy przez c liczbę kul czarnych a przez b liczbę kul białych. Zauważmy, że $c \in \mathcal{N}_2$, $b \in \mathcal{N}_1$.

Rozważmy zdarzenie $A = \{\text{wylosowane kule będą czarne}\}$.

Gra będzie sprawiedliwa, jeśli spełniony będzie następujący warunek:

$$P(A) = \frac{c(c-1)}{(c+b)(c+b-1)} = \frac{1}{2}.$$

Obliczając c z ostatniego warunku otrzymujemy $c = \frac{2b+1 + \sqrt{8b^2+1}}{2}$. Wyznaczając najmniejszą naturalną wartość funkcji c zmiennej b otrzymujemy $c = 3$ i $b = 1$.

W sytuacji, gdy liczba kul białych jest parzysta, rozwiązanie uzyskujemy przyjmując $b = 2n$, gdzie $n \in \mathcal{N}_1$. Stąd

$$c(n) = \frac{4n+1 + \sqrt{32n^2+1}}{2}.$$

Postępując jak poprzednio dostajemy $n = 3$, co daje $b = 6$ i $c = 15$.

3.31. W urnie jest n kul, wśród których 6 jest białych.

- Ile co najwyżej kul może być w urnie, aby przy dwukrotnym losowaniu bez zwracania kuli z tej urny, prawdopodobieństwo dwukrotnego wylosowania kuli białej było większe od $\frac{1}{3}$.
- Ile co najwyżej może być kul w urnie, aby przy dwukrotnym losowaniu ze zwracaniem kuli z tej urny prawdopodobieństwo wylosowania dwu kul białych było większe od $\frac{1}{3}$.

3.32. Zostałeś zaproszony do gry, w której rekwizytem są dwie urny U_1 i U_2 . W urnie U_1 jest 5 kul: trzy o numerze 2, jedna o numerze 4 i jedna o numerze 5. W urnie U_2 jest osiem kul: pięć z numerem 3 i trzy z numerem 1. Z tych dwu urn możesz wybrać sobie jedną, drugą bierze twój przeciwnik. Każdy z was losuje kulę ze swojej urny. Numer wylosowanej kuli to wylosowana liczba. Zwycięża ten, kto wylosuje większą liczbę. Czy skorzystałbyś z prawa pierwszeństwa, gdy chodzi o wybór urny? Którą z urn wybierzesz i dlaczego? Jak zmienić skład kul w urnie U_2 aby szanse wygranej dla każdego z graczy były jednakowe?

3.33. Dane są trzy urny: urna U_1 z jedną kulą o numerze 6 i dwiema kulami o numerze 1, urna U_2 z jedną kulą o numerze 0 i dwiema kulami o numerze 4, urna U_3 z jedną kulą o numerze 2 i dwiema kulami o numerze 3.

- Spośród dwu urn: U_1 i U_2 masz prawo wybrać sobie jedną, drugą bierze Twój przeciwnik w grze. Każdy z Was losuje kulę ze swojej urny. Numer wylosowanej kuli to wylosowana liczba. Zwycięża ten, kto wylosuje większą liczbę. Na wybór której urny się zdecydujesz i dlaczego?
- Masz prawo wybrać sobie jedną z trzech urn, jedną z dwu pozostałych wybierze sobie Twój przeciwnik w grze. Każdy z Was losuje następnie liczbę i zwycięża ten, kto wylosuje liczbę większą. Czy jest wśród tych urn najlepsza? Czy prawo pierwszeństwa jest w tej sytuacji dla Ciebie przywilejem? Jak uzasadnisz odpowiedzi na gruncie rachunku prawdopodobieństwa?

Założmy, że wybrałem urnę U_1 , przeciwnik ma więc urnę U_2 . Para (Ω, p) określona w rozwiązaniu zadania 2.31 (str. 51) jest modelem probabilistycznym omawianego doświadczenia losowego. Rozważmy zdarzenie:

$A = \{\text{numer kuli wylosowanej z urny } U_1 \text{ będzie większy od numeru kuli wylosowanej z urny } U_2\}$, oraz

$B = \{\text{numer kuli wylosowanej z urny } U_1 \text{ będzie mniejszy od numeru kuli wylosowanej z urny } U_2\}$

W modelu probabilistycznym (Ω, p) jest: $A = \{10, 60, 64\}$, $B = \{14\}$ a więc $P(A) = \frac{5}{9}$ i $P(B) = \frac{4}{9}$. Mamy tu $P(A) > P(B)$, a więc szanse gracza, który wybrał urnę U_1 są większe od szans jego przeciwnika. Urnę U_1 można w opisanej sytuacji nazwać „lepszą” od urny U_2 . Wynika stąd, że gracz, który

pierwszy wybiera urnę powinien wybrać urnę U_1 .

Aby odpowiedzieć na pytanie w zadaniu 3.33b) należy rozstrzygnąć, czy istnieje wśród tych trzech urn najlepsza, a więc taka, której wybór daje większe szanse na zwycięstwo niezależnie od tego, którą z pozostałych urn wybierze przeciwnik. Postępując analogicznie jak poprzednio stwierdzamy, że urna U_2 jest „lepsza” od urny U_3 , a urna U_3 „lepsza” od U_1 . Wśród tych urn nie ma zatem najlepszej. Wynika stąd, że gracz wybierający urnę jako drugi jest w lepszej sytuacji. Niezależnie od tego jaką urnę wybierze pierwszy gracz, gracz drugi może spośród pozostałych urn wybrać sobie urnę „lepszą”. Prawo pierwszeństwa nie jest w tej sytuacji przywilejem.

3.6. Prawdopodobieństwo w przeliczalnych przestrzeniach probabilistycznych

W tym paragrafie przedstawimy serię zadań dotyczących obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia w przeliczalnych, a więc nieskończonych przestrzeniach probabilistycznych.

3.34. Rzut monetą powtarzany jest tak długo aż wyniki trzech ostatnich rzutów utworzą serię *oro*.

- Określ model probabilistyczny tego czekania na serię *oro*.
- W tym modelu probabilistycznym oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń związanych z czekaniem na serię *oro*:

$$A = \{\text{serię } oro \text{ poprzedzą same reszki}\},$$

$$B = \{\text{seria } oro \text{ pojawi się po pięciu rzutach monetą}\},$$

$$C_n = \{\text{seria } oro \text{ pojawi się po } n \text{ rzutach monetą}\},$$

$$D = \{\text{seria } oro \text{ zostanie uzyskana po co najmniej czterech rzutach}\},$$

$$E = \{\text{przed uzyskaniem serii } oro \text{ ani raz nie wypadnie orzeł}\},$$

$$F = \{\text{serię } oro \text{ poprzedzą co najwyżej cztery reszki i nie poprzedzi jej żaden orzeł}\},$$

$$G = \{\text{seria } oro \text{ zostanie w ogóle uzyskana}\}.$$

Przestrzeń probabilistyczna, będąca modelem czekania na serię *oro*, jest parą (Ω, p) , gdzie Ω jest zbiorem ciągów o wyrazach ze zbioru $\{o, r\}$, co najmniej trzywyrazowych i takich, że trzy ostatnie wyrazy tworzą serię *oro* i żadne trzy kolejne wcześniejsze wyrazy nie tworzą tej serii, a funkcja p przypisuje każdemu takiemu ciągowi liczbę $(\frac{1}{2})^n$, jeśli n jest długością tego ciągu.

Niech $r_n oro$ oznacza ciąg orłów i reszek, w którym n początkowych wyrazów to r a kolejne trzy tworzą serię *oro*. W przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) zdarzenie A jest zbiorem ciągów postaci $r_n oro$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$. Mamy