*sposób ustawione*, na założenie: *o ustawieniu osób zdecydowało nietendencyjne losowanie*. Łatwo sprawdzić, że przy nowym założeniu każdy z trzech opisanych sposobów można zastąpić jednym z dwu pozostałych.

$\boxed{3.22.}$ Zaproponuj nietendencyjne losowanie za pomocą zapałek $k$ osobowej delegacji spośród $s$ osób. Poprawność zaproponowanej metody uzasadnij formułując i rozwiązując odpowiednie zadanie z rachunku prawdopodobieństwa.

$\boxed{3.23.}$ Z grona $s$ osób ($s>1$) trzeba wylosować jedną dając każdej równe szanse. Postanowiono to robić za pomocą „marynarza" (por. zad. 1.30). Każda z $s$ osób na dany znak jednocześnie wystawia pewną liczbę palców jednej ręki. Następnie zlicza się wystawione palce i począwszy od pewnej osoby odlicza kolejno ich liczbę jak w wyliczance.

a) Niech $s = 2$. Czy w tej sytuacji losowanie jest nietendencyjne? Czy szanse na wylosowanie danej osoby zależą od tego, od kogo zaczyna się odliczać?
b) Wykaż, że dla $s = 5$ szanse każdej osoby nie zależą od tego, od kogo zaczyna się odliczać.
c) Wykaż, że w przypadku $s = 6$ losowanie „marynarzem" nie daje osobom równych szans.
d) Czy są inne liczby osób, przy których losowanie „marynarzem" jest też tendencyjne?

Załóżmy, że $s = 2$. Każda z osób może wystawić od 1 do 5 palców. Przyjmujemy, że o tym, ile palców wystawia każda z osób rozstrzyga przypadek i że dla każdej z osób, każda liczba od 1 do 5 może być z jednakowym prawdopodobieństwem wystawiona przez tę osobę. Ten postulat „jednakowego prawdopodobieństwa" wydaje się być w tej sytuacji naturalny. Wystawianie palców prawej ręki przez dwie osoby jest zatem doświadczeniem losowym. Wspomniany postulat pozwala nam określić jego model probabilistyczny. Ponumerujmy osoby. Każde oczko w tabeli na rys. 3.6 można interpretować jako wynik tego doświadczenia. W przecięciu się $j$-tego wiersza i $k$-tej kolumny wpisano sumę liczb palców wskazanych przez obie osoby.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

$\longleftarrow$ *liczba palców wskazanych przez pierwszą osobę*

$\uparrow$ *liczba palców wskazanych przez drugą osobę*

**rys. 3.6.**

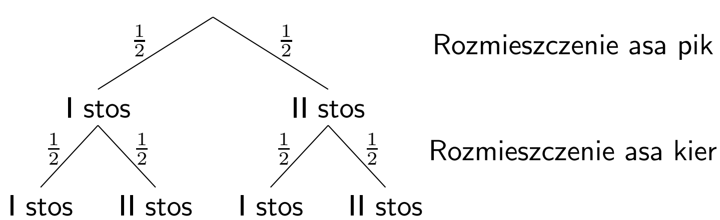
Załóżmy, że odliczanie rozpocznie się od pierwszej osoby i rozważmy zdarzenie $A_j = \{$*zostanie wylosowana j-ta osoba*$\}$, dla $j = 1, 2$. Spośród 25 jednakowo prawdopodobnych wyników 12 sprzyja zdarzeniu $A_1$ a 13 wyników zdarzeniu $A_2$, a więc $P(A_1) < P(A_2)$. W opisanym losowaniu szanse drugiej osoby są większe niż osoby pierwszej. Losowanie nie jest nietendencyjne.

W losowaniu „marynarzem" jednej spośród $s$ osób ponumerowanych od 1 do $s$ przeprowadza się pewne doświadczenie losowe. Jego wynik jest $s$-wyrazowym ciągiem o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wyraz $j$-ty ciągu oznacza liczbę palców wskazanych przez $j$-tą osobę. Każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny. Wszystkich wyników jest $5^s$.

Załóżmy, że liczba łącznie wystawionych palców będzie odliczana według numeracji osób i rozważmy zdarzenie $A_j = \{$*zostanie wylosowana j-ta osoba*$\}$, dla $j = 1, 2, ..., s$. Warunkiem koniecznym na to, aby losowanie było nietendencyjne, jest aby każdemu ze zdarzeń $A_j$ sprzyjało tyle samo wyników. Liczba $s$ musi być zatem dzielnikiem liczby $5^s$. Warunek ten jest spełniony jedynie w sytuacji gdy $s$ jest naturalną potęgą liczby 5. Jest to tylko warunek konieczny. Z tego, że $s$ jest naturalną potęgą liczby 5 nie wynika, że losowanie jest sprawiedliwe.

$\boxed{3.24.}$ Talię 52 kart po potasowaniu rozdzielono na dwa stosy po 26 kart w każdym stosie. Oblicz jakie jest prawdopodobieństwo, że as kier i as pik znajdą się w tym samym stosie. Oceń poprawność następujących rozwiązań tego zadania.

**Rozwiązanie 1.** W talii 52 kart ustalmy dwie karty: asa kier i asa pik. Przeanalizujmy jak te dwa asy mogą zostać rozmieszczone w dwóch stosach. W tym celu posłużmy się następującym drzewem stochastycznym.




**rys. 3.7.**

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, gdzie:
$\omega_1$ – `as pik i as kier trafią do stosu I,`
$\omega_2$ – `as pik trafi do stosu I, a as kier do stosu II,`
$\omega_3$ – `as pik trafi do stosu II, a as kier do stosu I,`
$\omega_4$ – `as pik i as kier trafią do stosu II.`
W modelu opisanym za pomocą drzewa stochastycznego, zdarzeniu $A = \{$*obydwa asy trafią do tego samego stosu*$\}$ sprzyjają 2 spośród czterech jednakowo praw-

dopodobnych wyników. Zatem $P(A) = \frac{1}{2}$.

**Rozwiązanie 2.** Zauważmy, że aby podzielić talię 52 kart na dwa równoliczne stosy wystarczy z niej wylosować 26 kart, pozostałe 26 kart potraktujmy jako drugi stos. Niech $\Omega$ będzie zbiorem 26-elementowych podzbiorów zbioru 52 kart. W tej sytuacji zdarzenie: $A = \{$*obydwa asy trafią do tego samego stosu*$\}$ można przedstawić jako $B \cup C$, gdzie
$B = \{$*wśród wylosowanych 26 kart znajdą się: as kier i as pik*$\}$,
$C = \{$*wśród wylosowanych 26 kart nie będzie asa kier i asa pik*$\}$.
Zadarzenia $B$ i $C$ są rozłączne, a więc

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{\binom{50}{24}}{\binom{52}{26}} + \frac{\binom{50}{26}}{\binom{52}{26}} \approx 0,45 \neq \frac{1}{2}.$$

W zacytowanch rozwiązaniach uzyskano różne wyniki liczbowe. Wynika stąd, że co najmniej jedno z tych rozwiązań jest błędne. Pojawia się tu problem zgodności skonstruowanego modelu probabilistycznego z doświadczeniem, o którym mowa w zadaniu. W rozwiązaniu pierwszym w istocie skonstruowano model dla rozmieszczania dwóch asów na dwóch miejscach (stosach), nie uwzględniając pozostałych kart. To rozwiązanie nie jest poprawne, bo model nie jest właściwy. Poprawne jest natomiast rozwiązanie 2.

## 3.5. Prawdopodobieństwo zdarzenia jako narzędzie rozstrzygania sprawiedliwości pewnych gier losowych. Organizacja fazy matematyzacji i fazy interpretacji

Pojęcie „sprawiedliwości gry” jest pojęciem pozamatematycznym. W tym rozdziale proponujemy matematyczne kryterium pozwalające rozstrzygać sprawiedliwość pewnych gier losowych. Chodzi tu o gry, w których uczestniczy ustalona liczba graczy. Każdy z graczy stawia na zdarzenie (każdy na inne) związane z doświadczeniem losowym przeprowadzanym w grze. Zdarzenia, na które gracze stawiają, tworzą układ zupełny zdarzeń. Tego typu gra jest sprawiedliwa, jeśli prawdopodobieństwa wszystkich zdarzeń, na które gracze stawiają, są równe. Prawdopodobieństwo zdarzenia jest tu więc matematycznym narzędziem rozstrzygania, a najpierw definiowania sprawiedliwości gry losowej.

Chodzi tu o szczególny typ gry losowej, różniącej się od gier typu „lotto”, gdzie liczba graczy jest nieograniczona i każdy gracz może stawiać na dowolne zdarzenie związane z doświadczeniem przeprowadzanym w grze.

$\boxed{3.25.}$ W urnie jest $b$ kul białych, $c$ czarnych i jedna zielona. W grze, w której uczestniczy trzech graczy: $G_A$, $G_B$ i $G_C$, losuje się jednocześnie dwie kule z tej urny. Jeśli obie wylosowane kule są białe, to zwycięża gracz $G_A$, jeśli obie wylosowane kule są czarne, to zwycięża gracz $G_B$, a gdy wylosowane kule są różnych kolorów, to zwycięża gracz $G_C$.

a) Niech $b = c = 2$. Dla każdego z graczy oblicz prawdopodobieństwo, że on zwycięży w takiej grze.
b) Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby $b$ i $c$, dla których gra jest sprawiedliwa? Jak należy rozumieć sprawiedliwość takiej gry?

W drugiej części zadania należy zbadać, czy istnieją takie liczby $b$ i $c$, aby gra była sprawiedliwa. Jest oczywiste, że w urnie muszą być co najmniej dwie kule białe i co najmniej dwie kule czarne. Oznaczmy wyniki losowania dwu kul:

$\omega_0$ – `obie wylosowane kule będą białe`,
$\omega_1$ – `obie wylosowane kule będą czarne`.
$\omega_2$ – `jedna wylosowana kula będzie biała i jedna czarna`,
$\omega_3$ – `jedna wylosowana kula będzie biała i jedna zielona`,
$\omega_4$ – `jedna wylosowana kula będzie czarna i jedna zielona`,

Przy tej umowie $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega$ jest funkcją $p$, określoną następująco:

$$p(\omega_0) = \frac{b(b-1)}{(b+c+1)(b+c)}, \quad p(\omega_1) = \frac{c(c-1)}{(b+c+1)(b+c)},$$
$$p(\omega_2) = \frac{2bc}{(b+c+1)(b+c)}, \quad p(\omega_3) = \frac{2b}{(b+c+1)(b+c)},$$
$$p(\omega_4) = \frac{2c}{(b+c+1)(b+c)}.$$

Z doświadczeniem losowym przeprowadzanym w grze zwiążmy następujące zdarzenia:

$A = \{$*obie wylosowane kule będą białe*$\}$,
$B = \{$*obie wylosowane kule będą czarne*$\}$,
$C = \{$*Każda z dwu wylosowanych kul będzie innego koloru*$\}$.

W przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, p)$ mamy: $A = \{\omega_0\}$, $B = \{\omega_1\}$, $C = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, a więc

$$P(A) = \frac{b(b-1)}{(b+c+1)(b+c)}, \quad P(B) = \frac{c(c-1)}{(b+c+1)(b+c)},$$
$$P(C) = \frac{2bc+2b+2c}{(b+c+1)(b+c)}.$$

Aby gra była sprawiedliwa musi zachodzić równość: $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, z której uzyskujemy następujący układ warunków:

$$\begin{cases} P(A) = P(C), \\ P(B) = P(C), \end{cases}$$

prowadzący do następującego układu równań:

$$\begin{cases} b^2 - 2bc - 3b - 2c = 0, \\ c^2 - 2bc - 3c - 2b = 0. \end{cases}$$

Ostatni układ równań nie ma rozwiązania w zbiorze liczb całkowitych dodatnich, a więc nie istnieją takie liczby $b$ i $c$, dla których gra jest sprawiedliwa.

Oto inna, prostsza argumentacja. Z faktu iż $P(A) = P(B)$ wynika, iż $a = c$. Z tego, że $P(A) = P(C)$ wynika równanie $b^2+5b = 0$, które nie ma rozwiązania w zbiorze liczb całkowitych dodatnich.

W zadaniu chodzi o poszukiwanie wartości parametrów, przy których prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń spełniają określone warunki. Przedstawimy jeszcze kilka zadań, w rozwiązaniach których również wyznacza się pewne parametry.

$\boxed{3.26.}$ W urnie $U$ są 3 kule białe i 6 czarnych, a w urnie $V$ — 4 kule czarne i 4 białe. W grze losuje się jednocześnie dwie kule z jednej z tych urn. Zwyciężasz, gdy wylosowane kule są jednakowego koloru, gdy są to kule różnych kolorów — zwycięża twój przeciwnik w grze. Masz prawo zdecydować, z której urny będą losowane kule. Jaką podejmiesz w tej sytuacji decyzję? Odpowiedź uzasadnij.

$\boxed{3.27.}$ W urnie jest 6 kul czarnych i dwie białe. W grze, w której uczestniczy dwóch graczy: $G_A$ i $G_B$, losuje się jednocześnie dwie kule z tej urny. Jeśli wylosowane kule są tego samego koloru, to zwycięża gracz $G_A$, gdy wylosowane kule są różnych kolorów to zwycięża gracz $G_B$.

a) Dla każdego z graczy oblicz prawdopodobieństwo jego zwycięstwa.

b) Ile należy dołożyć kul białych do powyższej urny, aby szanse graczy były równe?

$\boxed{3.28.}$ Rozważmy następującą grę z udziałem trzech graczy: $G_A$, $G_B$ i $G_C$. W urnie znajduje się $n$ kul białych, $2n$ czarnych i $3n$ zielonych. Z tej urny losuje się trzy kule. Jeśli wylosowane kule są tego samego koloru, to zwycięża gracz $G_A$, gdy każda innego koloru gracz $G_B$, w pozostałych przypadkach gracz $G_C$. Rozstrzygnij, czy taka gra jest sprawiedliwa.

Z doświadczeniem losowym przeprowadzanym w grze zwiążmy następujące zdarzenia:

$A = \{$*wszystkie wylosowane kule będą tego samego koloru*$\}$,

$B = \{$*każda z wylosowanych kul będzie innego koloru*$\}$,

$C = \{$*dwie wylosowane kule będą tego samego koloru, jedna innego*$\}$.

Prawdopodobieństwa zdarzeń wynoszą odpowiednio:

$$P(A) = \frac{6n^2 - 7n + 2}{(6n-2)(6n-1)}, \quad P(B) = \frac{6n^2}{(6n-2)(6n-1)},$$
$$P(C) = \frac{14n^2 - 11n}{(6n-2)(6n-1)}.$$

W opisanej grze zwycięży gracz $G_A$, gdy zajdzie zdarzenie $A$, zwycięży gracz $G_B$, gdy zajdzie zdarzenie $B$, zwycięży gracz $G_C$, gdy zajdzie zdarzenie $C$. Nietrudno zauważyć, że dla każdej liczby naturalnej $n$ jest $P(B) > P(A)$, a więc gra nie jest sprawiedliwa.

$\boxed{3.29.}$ W urnie znajdują się kule czarne i białe. W grze z udziałem dwóch graczy: $G_A$ i $G_B$, losuje się dwa razy bez zwracania kulę z tej urny. Jeśli obydwie wylosowane kule będą czarne, to zwycięża gracz $G_A$, w pozostałych przypadkach zwycięża gracz $G_B$.

a) Ile co najmniej kul czarnych powinno być w urnie, aby taka gra była sprawiedliwa?
b) Odpowiedz na powyższe pytanie, w sytuacji gdy wiadomo, że liczba kul białych jest parzysta.

$\boxed{3.30.}$ Rozważ analgiczne problemy, jak w poprzednim zadaniu, w sytuacji gdy kule losowane są ze zwracaniem.

Oznaczmy przez $c$ liczbę kul czarnych a przez $b$ liczbę kul białych. Zauważmy, że $c \in \mathcal{N}_2$, $b \in \mathcal{N}_1$.

Rozważmy zdarzenie $A = \{\textit{wylosowane kule będą czarne}\}$.

Gra będzie sprawiedliwa, jeśli spełniony będzie następujący warunek:

$$P(A) = \frac{c(c-1)}{(c+b)(c+b-1)} = \frac{1}{2}.$$

Obliczając $c$ z ostatniego warunku otrzymujemy $c = \dfrac{2b + 1 + \sqrt{8b^2+1}}{2}$. Wyznaczając najmniejszą naturalną wartość funkcji $c$ zmiennej $b$ otrzymujemy $c = 3$ i $b = 1$.

W sytuacji, gdy liczba kul białych jest parzysta, rozwiązanie uzyskujemy przyjmując $b = 2n$, gdzie $n \in \mathcal{N}_1$. Stąd

$$c(n) = \frac{4n + 1 + \sqrt{32n^2+1}}{2}.$$

Postępując jak poprzednio dostajemy $n = 3$, co daje $b = 6$ i $c = 15$.

$\boxed{3.31.}$ W urnie jest $n$ kul, wśród których 6 jest białych.

a) Ile co najwyżej kul może być w urnie, aby przy dwukrotnym losowaniu bez zwracania kuli z tej urny, prawdopodobieństwo dwukrotnego wylosowania kuli białej było większe od $\frac{1}{3}$.

b) Ile co najwyżej może być kul w urnie, aby przy dwukrotnym losowaniu ze zwracaniem kuli z tej urny prawdopodobieństwo wylosowania dwu kul białych było większe od $\frac{1}{3}$.

$\boxed{3.32.}$ Zostałeś zaproszony do gry, w której rekwizytem są dwie urny $U_1$ i $U_2$. W urnie $U_1$ jest 5 kul: trzy o numerze 2, jedna o numerze 4 i jedna o numerze 5. W urnie $U_2$ jest osiem kul: pięć z numerem 3 i trzy z numerem 1. Z tych dwu urn możesz wybrać sobie jedną, drugą bierze twój przeciwnik. Każdy z was losuje kulę ze swojej urny. Numer wylosowanej kuli to wylosowana liczba. Zwycięża ten, kto wylosuje większą liczbę. Czy skorzystałbyś z prawa pierwszeństwa, gdy chodzi o wybór urny? Którą z urn wybierzesz i dlaczego? Jak zmienić skład kul w urnie $U_2$ aby szanse wygranej dla każdego z graczy były jednakowe?

$\boxed{3.33.}$ Dane są trzy urny: urna $U_1$ z jedną kulą o numerze 6 i dwiema kulami o numerze 1, urna $U_2$ z jedną kulą o numerze 0 i dwiema kulami o numerze 4, urna $U_3$ z jedną kulą o numerze 2 i dwiema kulami o numerze 3.

a) Spośród dwu urn: $U_1$ i $U_2$ masz prawo wybrać sobie jedną, drugą bierze Twój przeciwnik w grze. Każdy z Was losuje kulę ze swojej urny. Numer wylosowanej kuli to wylosowana liczba. Zwycięża ten, kto wylosuje większą liczbę. Na wybór której urny się zdecydujesz i dlaczego?

b) Masz prawo wybrać sobie jedną z trzech urn, jedną z dwu pozostałych wybierze sobie Twój przeciwnik w grze. Każdy z Was losuje następnie liczbę i zwycięża ten, kto wylosuje liczbę większą. Czy jest wśród tych urn najlepsza? Czy prawo pierwszeństwa jest w tej sytuacji dla Ciebie przywilejem? Jak uzasadnisz odpowiedzi na gruncie rachunku prawdopodobieństwa?

Załóżmy, że wybrałem urnę $U_1$, przeciwnik ma więc urnę $U_2$. Para $(\Omega, p)$ określona w rozwiązaniu zadania 2.31 (str. 51) jest modelem probabilistycznym omawianego doświadczenia losowego. Rozważmy zdarzenie:

$A = \{$*numer kuli wylosowanej z urny* $U_1$ *będzie większy od numeru kuli wylosowanej z urny* $U_2\}$, oraz

$B = \{$*numer kuli wylosowanej z urny* $U_1$ *będzie mniejszy od numeru kuli wylosowanej z urny* $U_2$.$\}$

W modelu probabilistycznym $(\Omega, p)$ jest: $A = \{10, 60, 64\}$, $B = \{14\}$ a więc $P(A) = \frac{5}{9}$ i $P(B) = \frac{4}{9}$. Mamy tu $P(A) > P(B)$, a więc szanse gracza, który wybrał urnę $U_1$ są większe od szans jego przeciwnika. Urnę $U_1$ można w opisanej sytuacji nazwać „lepszą" od urny $U_2$. Wynika stąd, że gracz, który pierwszy wybiera urnę powinien powinien wybrać urnę $U_1$.

Aby odpowiedzić na pytanie w zadaniu 3.33b) należy rozstrzygnąć, czy istnieje wśród tych trzech urn najlepsza, a więc taka, której wybór daje większe szanse na zwycięstwo niezależnie od tego, którą z pozostałych urn wybierze przeciwnik. Postępując analogicznie jak poprzednio stwierdzamy, że urna $U_2$ jest „lepsza” od urny $U_3$, a urna $U_3$ „lepsza” od $U_1$. Wśród tych urn nie ma zatem najlepszej. Wynika stąd, że gracz wybierający urnę jako drugi jest w lepszej sytuacji. Niezależnie od tego jaką urnę wybierze pierwszy gracz, gracz drugi może spośród pozostałych urn wybrać sobie urnę „lepszą”. Prawo pierwszeństwa nie jest w tej sytuacji przywilejem.

## 3.6. Prawdopodobieństwo w przeliczalnych przestrzeniach probabilistycznych

W tym paragrafie przedstawimy serię zadań dotyczących obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia w przeliczalnych, a więc nieskończonych przestrzeniach probabilistycznych.

$\boxed{3.34.}$ Rzut monetą powtarzany jest tak długo aż wyniki trzech ostatnich rzutów utworzą serię *oro*.

a) Określ model probabilistyczny tego czekania na serię *oro*.

b) W tym modelu probabilistycznym oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń związanych z czekaniem na serię *oro*:
$A = \{$*serię oro poprzedzą same reszki*$\}$,
$B = \{$*seria oro pojawi się po pięciu rzutach monetą*$\}$,
$C_n = \{$*seria oro pojawi się po $n$ rzutach monetą*$\}$,
$D = \{$*seria oro zostanie uzyskana po co najmniej czterech rzutach*$\}$.
$E = \{$*przed uzyskaniem serii oro ani raz nie wypadnie orzeł*$\}$,
$F = \{$*serię oro poprzedzą co najwyżej cztery reszki i nie poprzedzi jej żaden orzeł*$\}$,
$G = \{$*seria oro zostanie w ogóle uzyskana*$\}$.

Przestrzeń probabilistyczna, będąca modelem czekania na serię *oro*, jest parą $(\Omega, p)$, gdzie $\Omega$ jest zbiorem ciągów o wyrazach ze zbioru $\{o, r\}$, co najmniej trzywyrazowych i takich, że trzy ostatnie wyrazy tworzą serię *oro* i żadne trzy kolejne wcześniejsze wyrazy nie tworzą tej serii, a funkcja $p$ przypisuje każdemu takiemu ciągowi liczbę $(\frac{1}{2})^n$, jeśli $n$ jest długością tego ciągu.

Niech $r_n oro$ oznacza ciąg orłów i reszek, w którym $n$ początkowych wyrazów to $r$ a kolejne trzy tworzą serię *oro*. W przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, p)$ zdarzenie $A$ jest zbiorem ciągów postaci $r_n oro$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$ . Mamy więc $A = \{roro, rroro, rrroro, \ldots\} = \{r_n oro : n = 1, 2, 3, \ldots\}$, a zatem — z definicji prawdopodobieństwa — jest:

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} p(r_n oro) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{8}.$$

W przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, p)$ jest $B = \{rroro, rooro, oooro\}$ . Ponieważ wszystkie wyniki sprzyjające zdarzeniu $B$ są tej samej długości, więc są jednakowo prawdopodobne i $\overline{\overline{B}} = 3$ czyli $P(B) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

Niech $c_n$ będzie mocą zbioru $C_n$. Wszystkie wyniki sprzyjające zdarzeniu $C_n$ są ciągami o długości $n$, a zatem prawdopodobieństwo każdego z nich jest równe $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Z definicji prawdopodobieństwa dostajemy, że

$$P(C_n) = c_n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

gdzie $c_n$ jest liczbą wyników sprzyjających zdarzeniu $C_n$.

Weźmy pod uwagę zdarzenie przeciwne do zdarzenia $D$, tj. zdarzenie

$D' = \{$*seria oro pojawi się wcześniej niż po czterech rzutach*$\}$.

Zdarzeniu $D'$ sprzyja tylko wynik *oro*, a więc $D'$ jest zdarzeniem prostym, a zatem, z definicji prawdopodobieństwa, $P(D') = p(oro) = \frac{1}{8}$. Z twierdzenia o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego (por. zad. 3.5d)) wynika, że

$$P(D) = 1 - P(D') = 1 - \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8}.$$

Zauważmy, że $E = A \cup \{oro\}$, a zatem $P(E) = P(A) + p(oro) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$. Ponieważ $F = \{oro, roro, rroro, rrroro, rrrroro\}$, zatem

$$P(F) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = \frac{31}{128}.$$

Zdarzenie $G$ jest pewne, a zatem $P(G) = 1$.

$\boxed{3.35.}$ Rozważmy oczekiwanie na serię *roo*. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) $A = \{$*seria roo zostanie uzyskana w czterech rzutach*$\}$,

b) $B = \{$*seria roo zostanie uzyskana nie później niż po czwartym rzucie*$\}$,

c) $C = \{$*seria roo zostanie uzyskana nie wcześniej niż po piątym rzucie*$\}$.

$\boxed{3.36.}$ Znajdź najmniejszą liczbę $k$ rzutów, przy której prawdopodobieństwo zdarzenia $A_k = \{$*seria roo zostanie uzyskana nie później niż po $k$-tym rzucie*$\}$ jest większe od $0,4$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $B_k = \{$*seria roo zostanie uzyskana w $k$-tym rzucie*$\}$. Rozważ analogiczne problemy dla serii *oor*.

Niech $(\Omega, p)$ będzie przestrzenią probabilistyczną dla oczekiwania na serię $roo$. Przestrzeń tę określono w zadaniu 2.52 (str. 70).

Z grafu z rysunku 2.24 wynika, że:
$A_3 = B_3 = \{roo\}$, a zatem $P(A_3) = p(roo) = \frac{1}{8} < 0,4$,
$A_4 = A_3 \cup B_4 = A_3 \cup \{oroo, rroo\}$, a więc

$$P(A_4) = P(A_3) + p(oroo) + p(rroo) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} < 0,4,$$

$A_5 = A_4 \cup B_3 = A_4 \cup \{ooroo, rrroo, orroo, roroo\}$, a zatem $P(A_5) = P(A_4) + p(ooroo) + p(rrroo) + p(orroo) + p(roroo) = \frac{3}{8} < 0,4$,
$A_6 = A_5 \cup B_6 = A_5 \cup \{oooroo, rrrroo, oorroo, orrroo, rorroo, ororoo, rroroo\}$, a więc

$$P(A_6) = \frac{31}{64} > 0,4.$$

Szukane $k$ jest zatem równe 6.

Jak nietrudno sprawdzić $P(B_3) = P(B_4) = P(B_5) = \frac{1}{8}$. Zdarzenia $B_3$, $B_4$ i $B_5$ nie są równoliczne i są jednakowo prawdopodobne.

W przypadku serii $oor$ można skorzystać z rozwiązania zadania dla serii $roo$, gdyż modele probabilistyczne doświadczeń losowych $d_{roo}$ i $d_{oor}$ są izomorficzne. Wynika stąd, że szukane $k$ dla serii $oor$ jest takie samo, jak w przypadku serii $roo$.

$\boxed{3.37.}$ Kostka sześcienna ma na jednej ściance liczbę 1, na pozostałych pięciu liczbę 0 (zob. rys. 1.13). Rzut taką kostką powtarzany jest tak długo, aż liczba 1 zostanie wyrzucona dokładnie 5 razy (czyli aż uzyska się pięć „jedynek"). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
$A_m = \{$*pięć „jedynek" zostanie uzyskanych w* $m$ *rzutach*$\}$
$B_m = \{$*pięć „jedynek" zostanie uzyskanych nie później niż w* $m$*-tym rzucie*$\}$,
$C_m = \{$*pięć „jedynek" zostanie uzyskanych nie wcześniej niż w* $m$*-tym rzucie*$\}$,
dla $m = 5, 6, 7, \ldots$ .

W zadaniu mowa jest o schemacie Pascala, w którym $k = 5$ i $u = \frac{1}{6}$. Rozważmy ogólniejsze zadanie.

$\boxed{3.38.}$ Prawdopodobieństwo sukcesu w próbie Bernoullego jest równe $u$, gdzie $u \in (0, 1)$. Niech $k$ będzie ustaloną dodatnią liczbą naturalną. Próba powtarzana jest dopóty, dopóki sukces nie zostanie uzyskany $k$ razy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: $A_m = \{$*$k$ sukcesów zostanie uzyskanych w $m$ próbach*$\}$, gdzie $m$ jest ustaloną liczbą naturalną i $m \geqslant k$.

Zdarzenie $A_m$ wiąże się ze schematem Pascala. Model probabilistyczny tego doświadczenia określono w zadaniu 2.64.

Zdarzeniu $A_k$ sprzyja tylko jeden wynik, który jest ciągiem $k$ „jedynek" (sukcesów). Jego prawdopodobieństwo wynosi $u^k$, a więc $P(A_k) = u^k$.

Weźmy $m>k$. Wszystkie wyniki sprzyjające zdarzeniu $A_m$ są jednakowo prawdopodobne. Prawdopodobieństwo każdego jest równe $u^k \cdot (1-u)^{m-k}$. Z definicji prawdopodobieństwa zdarzenia wynika zatem, że

$$P(A_m) = a_m \cdot [u^k \cdot (1-u)^{m-k}],$$

gdzie $a_m$ jest liczbą wyników sprzyjających zdarzeniu $A_m$.

Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia w nieskończonej przestrzeni probabilistycznej sprowadza się do pewnego zagadnienia natury kombinatorycznej. Pytanie: Ile jest wyników sprzyjających zdarzeniu $A_m$? zastąpmy pytaniem:

Na ile sposobów można skonstruować $m$-wyrazową wariację zbioru $\{0,1\}$, której ostatnim wyrazem jest liczba 1 i w której jest łącznie $k$ wyrazów równych 1?

Ostatnie pytanie jest pytaniem o to, na ile sposobów można $k-1$ „jedynek" rozmieścić na $m-1$ miejscach. Dla $m > k$ mamy zatem:

$$P(A_m) = \binom{m-1}{k-1} u^k (1-u)^{m-k}.$$

Zauważmy, że ostatni wzór zachodzi także w przypadku $m = k$.

Zdarzenia $A_k, A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots$ tworzą układ zupełny zdarzeń, a więc

$$P(\bigcup_{m=k}^{\infty} A_m) = \sum_{m=k}^{\infty} P(A_m) = 1,$$

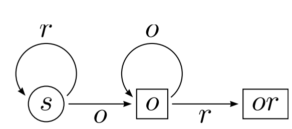
skąd wynika, że

$$\sum_{m=k}^{\infty} \binom{m-1}{k-1} u^k (1-u)^{m-k} = 1 \text{ dla każdego } u \in (0,1).$$

W ten sposób znaleźliśmy sumę pewnego szeregu na gruncie rachunku prawdoopodobieństwa.

$\boxed{3.39.}$ Rozważmy dwa zdarzenia związane z czekaniem na serię $or$:
$A = \{$*seria or zostanie uzyskana w parzystym rzucie*$\}$,
$B = \{$*seria or zostanie uzyskana w nieparzystym rzucie*$\}$.
Znajdź prawdopodobieństwa zdarzeń $A$ i $B$.

Rysunek 3.8 prezentuje graf stochastyczny dla czekania na serię $or$. Niech $(\Omega, p)$ będzie modelem probabilistycznym tego doświadczenia losowego.



**rys. 3.8.**

Mamy tu

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{lllll} or, & ror, & rror, & rrror, & rrrror, \\ & oor, & roor, & rroor, & rrroor, \\ & & ooor, & rooor, & rrooor, \quad ... \\ & & & oooor, & roooor, \\ & & & & ooooor, \end{array} \right\},$$

zaś funkcja $p$ każdemu wynikowi zbioru $\Omega$ przypisuje liczbę $(\frac{1}{2})^k$, gdzie $k$ jest długością wyniku (ciągu). W powyższym przedstawieniu zbioru $\Omega$ wyniki sprzyjające zdarzeniu $A$ znajdują się w „nieparzystych kolumnach". Długości wyników sprzyjających zdarzeniu $A$ są kolejnymi liczbami parzystymi. Jest jeden wynik długości 2 ($or$), 3 wyniki długości 4 ($rror$, $roor$, $ooor$), 5 wyników długości 6 ($rrrror$, $rrroor$, $rrooor$, $roooor$, $ooooor$), itd. Wyniki jednakowej długości są jednakowo prawdopodobne, a zatem

$$P(A) = \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}.$$

Do obliczenia sumy ostatniego szeregu wykorzystamy twierdzenie o różniczkowalności szeregu funkcyjnego.

Zauważmy, że $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{2k-1} = \dfrac{x}{1-x^2}$ dla $x \in (0,1)$, oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)x^{2k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x^{2k-1}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1}\right)' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Podstawiając $x = \frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1+(\frac{1}{2})^2}{[1-(\frac{1}{2})^2]^2} = \frac{5}{9}.$$

Zdarzenia $A$ i $B$ są przeciwne, a więc $P(B) = 1 - P(A) = \frac{4}{9}$.

W niektórych grach losowych z udziałem co najmniej dwóch graczy, pojawia się problem kolejności, w jakiej gracze „wchodzą do gry". Któryś z graczy rozpoczyna grę. Nasuwa się pytanie czy to pierwszeństwo wpływa na szanse gracza, który je uzyskał.

Teoretycznie są trzy możliwości:
a) pierwszeństwo sprawia, że szanse gracza, który je uzyskał, są większe niż szanse każdego z pozostałych graczy — mówimy wtedy, że prawo pierwszeństwa jest przywilejem,
b) pierwszeństwo, gdy chodzi o wejście do gry nie wpływa na szanse gracza,
c) pierwszeństwo sprawia, że szanse gracza, który je uzyskał, są mniejsze.

Prześledźmy kilka sytuacji, w których pojawia się problem pierwszeństwa jako przywileju i w których prawdopodobieństwo jest matematycznym narzędziem rozstrzygania tego problemu.

$\boxed{3.40.}$ Dwaj gracze $G_A$ i $G_B$ rzucają na przemian monetą a zwycięża ten, kto pierwszy wyrzuci reszkę. Gracz $G_A$ dostał prawo do pierwszego rzutu. Czy to prawo pierwszeństwa, jakie uzyskał gracz $G_A$, ma wpływ na jego szanse w grze, a więc czy jest ono dla gracza przywilejem? Czy jest to gra sprawiedliwa? Jak to rozstrzygnąć na gruncie rachunku prawdopodobieństwa?

Nie jest to w istocie matematyczne zadanie. Sformułowane w zadaniu pytania nie dotyczą bowiem matematyki. Dają się one jednak przetłumaczyć na język matematyki a zadanie daje się rozwiązać na gruncie matematyki. W zadaniu chodzi o ocenę szans każdego z graczy, a więc o prawdopodobieństwo tego, że w grze zwycięży gracz $G_A$ i prawdopodobieństwo, że w grze zwycięży gracz $G_B$. Obliczanie prawdopodobieństw jest już treścią matematycznego zadania. Zwycięstwo gracza $G_A$ jest równoznaczne z zajściem zdarzenia

$A = \{$*reszka wypadnie po raz pierwszy w nieparzystym rzucie*$\}$,

zwycięstwo gracza $G_B$ — z zajściem zdarzenia

$B = \{$*reszka wypadnie po raz pierwszy w rzucie parzystym*$\}$.

O zdarzeniach $A$ i $B$ była mowa w zadaniu 3.6. W tym zadaniu chodzi o prawdopodobieństwa zdarzeń $A$ i $B$. Są to zdarzenia związane z oczekiwaniem na reszkę (por. §3.2), a więc te zdarzenia i ich prawdopodobieństwa należy rozpatrywać w modelu probabilistycznym oczekiwania na reszkę. W tej przestrzeni probabilistycznej jest $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \ldots\}$ i $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \ldots\}$. Przekład zadania na język matematyki i zanurzenie zdarzeń w odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej jest fazą matematyzacji.

Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń $A$ i $B$ stanowi fazę rachunków. Ale nie tylko o rachunki tu chodzi. Z rozwiązania zadania 3.6 wynika, że $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{3}$. Wielkości wyliczonych prawdopodobieństw są teraz podstawą do sformułowania odpowiednich wnioskow na temat wyjściowej, pozamatematycznej sytuacji. Prawdopodobieństwa zdarzeń $A$ i $B$ nie są równe. Oznacza to, że szanse graczy w grze nie są jednakowe, a więc opisana gra nie jest sprawiedliwa. Z rachunków wynika, że $P(A) > P(B)$, więc szanse gracza, który uzyskał prawo do pierwszego rzutu są większe niż szanse jego przeciwnika w grze. Prawo pierwszeństwa, które uzyskał gracz $G_A$, daje mu dwa razy większe szanse na zwycięstwo niż ma jego przeciwnik. Ten etap rozwiązywania pozamatematycznego problemu stanowi fazę interpretacji. Tym samym rozwiązywanie problemu opisanego w zadaniu 3.40 stało się ilustracją procesu stosowania matematyki (por. [104]).

$\boxed{3.41.}$ Trzej gracze $G_A$, $G_B$, $G_C$ rzucają monetą w kolejności: $G_A$, $G_B$, $G_C$, $G_A$ itd., aż wypadnie reszka. Zwycięża ten z graczy, który pierwszy uzyska reszkę. Dla każdego z graczy znajdź prawdopodobieństwo, że on zwycięży w opisanej grze.

Nietrudno wykazać, że w opisanej sytuacji gracz, który uzyskał prawo do pierwszego rzutu, ma większe szanse niż każdy z jego przeciwników. Prawdopodobieństwa zwycięstwa poszczególnych graczy wynoszą odpowiednio $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$. Prawo pierwszeństwa jest w tej sytuacji przywilejem.

$\boxed{3.42.}$ Dwaj gracze rzucają na przemian monetą dopóty, dopóki po orle nie wypadnie reszka. Gra kończy się zatem wraz z uzyskaniem serii $or$. Zwycięża ten z graczy, którego rzut kończy doświadczenie losowe. Załóżmy, że gracz $G_B$ uzyskał prawo do pierwszego rzutu. Czy pierwszeństwo, jakie uzyskał gracz $G_B$, wpływa na jego szanse w grze i jak?

Rozwiązanie tego zadania wynika z rozwiązania zadania 3.39. Zajście zdarzenia $A$, o którym tam mowa, jest równoznaczne ze zwycięstwem gracza $G_A$, zajście zdarzenia $B$ — ze zwycięstwem gracza $G_B$. Jest $P(A) = \frac{5}{9}$ i $P(B) = \frac{4}{9}$. Gracz $G_B$, który rzuca pierwszy, ma zatem mniejsze szanse na zwycięstwo. Mamy przykład sytuacji, w której „dzięki" prawu pierwszeństwa gracz jest w gorszej sytuacji (ma mniejsze szanse na zwycięstwo w grze niż jego przeciwnik).

W grze z zadania 3.40 czeka się na reszkę, a więc na serię $r$ długości 1. W grze z zadania 3.42 czeka się na serię długości 2. W tym sensie gra z zadania 3.42 jest pewnym uogólnieniem gry z zadania 3.40.

$\boxed{3.43.}$ Po wymieszaniu 28 odwróconych kamieni domina, dwaj gracze na przemian wyciągają po jednym kamieniu a zwycięża ten, kto trafi na pusty dublet (kamień bez oczek). Czy prawo pierwszeństwa, gdy chodzi o losowanie kamienia domina, jest dla gracza przywilejem?

$\boxed{3.44.}$ Rekwizytem w grze jest talia 52 kart. Po potasowaniu karty zostają ułożone w stos, rewersami ku górze. Dwaj gracze, na przemian, biorą kolejne karty ze stosu, a zwycięża ten, kto pierwszy trafi na asa pik. Czy prawo pierwszeństwa jest w takiej grze przywilejem dla gracza? Jaka jest odpowiedź na analogiczne pytanie w sytuacji, gdy rekwizytem jest zestaw 13 kart pikowych?

Nietrudno zauważyć, że zestaw kart można w opisanej grze zastąpić urną, w której jest jedna kula czarna i $s-1$ kul białych ($s = 52$ w pierwszej wersji gry i $s = 13$ w wersji drugiej). W [82] (s. 48-49) wykazano za pomocą zasady indukcji, że dla każdego parzystego $s$ gra jest sprawiedliwa. Gdy $s$ jest liczbą nieparzystą, szanse gracza mającego prawo pierwszeństwa są większe od szans jego przeciwnika.

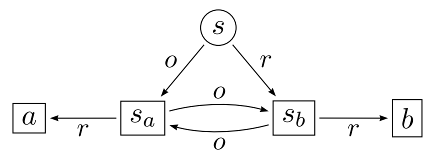
W przypadku zadania 3.43 chodzi o $s = 28$.

Rozwiązania ostatnich zadań pokazują, że prawo pierwszeństwa może zwiększać szanse gracza a więc być przywilejem (zad. 3.40 i 3.41), zmiejszać szanse gracza (zad. 3.42), prawo to może także nie wpływać na szanse gracza (zad. 3.43). W zadaniu 3.44 pierwszeństwo nie wpływa na szanse gracza, gdy mowa o pełnej talii kart, zwiększa zaś szanse gracza (który to pierwszeństwo uzyskał), w przypadku zestawu 13 kart pikowych.

$\boxed{3.45.}$ Grę z zadania 3.40 poprzedźmy rundą wstępną. Wynik (wstępnego) rzutu monetą rozstrzyga, który z graczy uzyskuje prawo do pierwszego rzutu. Przyjmijmy, że gdy wypadnie orzeł, to właściwą grę rozpoczyna $G_A$, gdy reszka, to gracz $G_B$. Czy taka gra jest sprawiedliwa?

Gra z zadania 3.40 nie jest sprawiedliwa. Poprzedzenie gry rundą wstępną sprawia, że nowa gra jest sprawiedliwa.

Przebieg gry można interpretować jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym z rys. 3.9 Oznaczmy przez $A$ zbiór tras prowadzących do węzła $\boxed{a}$ a przez $B$ zbiór tras prowadzących do węzła $\boxed{b}$. Każdej trasie długości $k$ ze zbioru $A$ odpowiada dokładnie jedna trasa tej samej długości w zbiorze $B$ i odwrotnie. Trasy tej samej długości są jednakowo prawdopodobne, więc $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Gra jest sprawiedliwa.




**rys. 3.9.**

## 3.7. Gry Penneya — osobliwe problemy, argumentacje i paradoksy

Rozważmy $s$ serii orłów i reszek: $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$, takich, że żadna z nich nie zawiera się w innej. Niech $m_j$ będzie długością serii $\omega_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, s$. W grze uczestniczy $s$ graczy $G_1, G_2, \ldots, G_s$. Rzut monetą powtarzany jest w grze tak długo, aż:
— albo wyniki $m_1$ ostatnich rzutów utworzą serię $\omega_1$ i wtedy zwycięża gracz $G_1$,
— albo wyniki $m_2$ ostatnich rzutów utworzą serię $\omega_2$ i wtedy zwycięża gracz $G_2$,
— …
— albo wyniki $m_s$ ostatnich rzutów utworzą serię $\omega_s$ i wtedy zwycięża gracz $G_s$.
W grze powtarzany jest rzut monetą dopóty, dopóki nie uzyska się którejś ze wspomnianych serii, a zwycięża gracz $G_j$, jeśli serii $\omega_j$ doczekano się naj-